استفن بار

سرگرمیهای توپولوژی

ترجمهٔ : پرویز شهریاری

استفن بار

سرگرمی‌های توپولوژی

(توپولوژی تجربی)

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر نی

تهران – ۱۳۶۵

نشر نی: تهران، بولوار کشاورز، پاساژ سامان، شمارهٔ ۷. (تلفن ۶۵۹۵۸۵)

سرگرمی‌های توپولوژی (توپولوژی تجربی)

EXPERIMENTS IN TOPOLOGY

استفن بار

Stephen Barr

ترجمهٔ پرویز شهریاری

چاپ اول، ۱۳۶۵-تهران

حروفچینی: مهدی-تهران

چاپ و صحافی: چاپخانه میخك

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

در این کتاب

۱

توپولوژی یعنی چه؟

توپولوژی (یا مکان‌شناسی)، شاخهٔ نسبتاً تازه‌ای از ریاضیات است، به‌همین مناسبت، ممکن است سخن گفتن از آزمایش و تجربه در دانشی‌چنین انتزاعی، غریب وحیرت‌آوربه‌نظرآید. ازآن‌عجیب‌تر این که، می‌خواهیم پایهٔ‌کارخود را، بربی‌اطلاعی خواننده ازاین‌شاخهٔ جوان ریاضی بگذاریم. ولی، شاید، همین «جوانی» شاخه، بتواند این امکان را برای ما فراهم آوردکه چیزی به‌آن اضافه کنیم. البته، این جست‌وجویی درشاخك‌های نورس آن خواهد بود ونه‌دربلندی‌های درخت. به‌جزاین، اگربرخی آزمایش‌ها،نتواند به‌آن‌چه‌می‌دانیم، مطلب تازه‌ای را اضافه‌کند، دست‌کم، می‌تواند به‌خواننده‌کمك‌کند تا این «صید گریزپا» را بهتربشناسد.

تعریف توپولوژی، بی‌اندازه دشواراست. شرح آن، به‌مراتب بغرنج‌تر ازبیانی است‌که درفرهنگ‌های معروف‌برای حساب («دانش مربوط به‌عددهای مثبت و حقیقی»[1] یا «هنرانجام عمل‌های مختلف با

1. Webster's New Collegiate Dictionary.

کمیت‌های عددی وروابط آن»[1]، جبر («تعمیم و گسترش حساب»[2])یا هندسه («مطالعهٔ ویژگی‌های [ریاضی] فضا»[3]) پیشنهاد شده است. [مارك‌بار، به‌طور کلی، ریاضیات را به‌عنوان چیزی که «حقیقت‌ها را به‌حالت خشك شدهٔ خودنگه می‌دارد وما هم با خون‌سردی به مطالعهٔ روابط بین آن‌ها می‌پردازیم»، تعریف می کند، تعریفی که بیشتربراندام جبربرازنده‌است.]

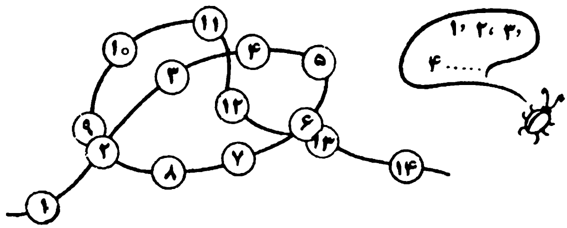
توپولوژی، که به‌عنوان بخشی ازهندسه، حرکت خود را آغازکرد، به‌سرعت دربسیاری ازشاخه‌های دیگرریاضیات هم‌ریشه دوانید.این گزارهٔ به‌تقریب‌درست‌است‌که: توپولوژی عبارت است از توانایی خاصی ازعقل که هدف خاص خود را دنبال می کند. (بعداً متوجه خواهیم شد که، همین‌جملهٔ مبهم، به‌خوبی منعکس کنندهٔ طنین توپولوژی است.)

به‌مفهومی، می‌توان توپولوژی را دانشی دانست که به‌مطالعهٔ پیوستگی می‌پردازد: باآغاز از پیوستگی فضا یا شکل، به‌سمت تعمیم حرکت می کند و، سپس، ازروی قیاس و شبیه‌سازی، خود را به‌درك تازه‌ای ازمفهوم پیوستگی می‌رساند و، درنتیجه، ازتصوری که دربارهٔ فضای «عادی» درذهن خود داریم، به‌کلی دورمی‌شود. متخصصان واقعی توپولوژی ازهر گونه تصویری پرهیزمی‌کنند تا دچارناباوری‌های احتمالی نشوند. این احتیاط، از آن‌جا ناشی می‌شود که نمایش «فضای» مورد نظرآن‌ها، ناممکن (وبی‌معنا) است. ولی ما، وقتی می‌توانیم دیدگاه‌های آن‌ها را، درتوپولوژی، ازشکل‌ها یا «فضاهای» موردنظرآن‌ها درك کنیم که، کارخود را، ازآنچه می‌بینیم و لمس

1. 2. 3. Encyclopaedia Britannica.

می‌کنیم، آغاز کنیم.

متخصص توپولوژی، به‌ویژگی‌های «چیزهایی» (که‌هنوز آن‌ها را به‌مفهـوم هندسی تعبیر می‌کنیم) علاقه‌مند است کـه به‌اندازهٔ کافی پایدار باشند، یعنی ویژگی‌هایی که ضمن تغییر شکل «چیز»، باکش‌دادن و به‌هم فشردن آن، تغییر نکند».

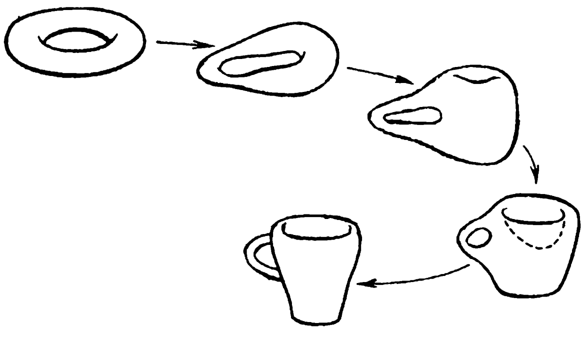


شکل ۱

روشن است کـه، مثلا، «دایره بودن»، ازجملهٔ ایـن ویژگی‌ها نیست؛ می‌توان دوانتهای پاره‌سیمی را به‌هم محکم و، از آن، دایره‌ای درست کرد، سپس، بدون پاره کردن سیم ویا جدا کردن دو انتهای آن ازهم، دایره را، تبدیل به‌مربع کرد. ولی، این حقیقت که، این تکه‌سیم (از دوطرف به‌هم چسبیده)، «انتهایی ندارد»، ضمن ایـن تغییر، به‌قوت خود باقی می‌ماند و، اگـر نوارشماره‌داری را درطول قطعه سیم قرار دهیم، «ردیف شماره‌هـا هم»، حتی وقتی کـه به‌سیم گـره بزنیم، حفظ می‌شود؛ تنها باید شماره‌ها را، ضمن حرکت در طـول سیم به‌حساب آوریم، درست مثل حشره‌ای که روی آن می‌خزد (شکل ۱ راببینید). اگر به‌جای سیم، یك رشتهٔ لاستیکی هم انتخاب کنیم ــ کـه در واقع، می‌توان طول آن را درازتریا کوتاه‌تر کرد ــ بازهم، این حقیقت، درستی خود را حفظ می‌کند، زیـرا دراین حالت، تنها می‌توان فاصلهٔ بیـن

شماره‌ها را تغییرداد و نه‌ردیف آن‌ها را.

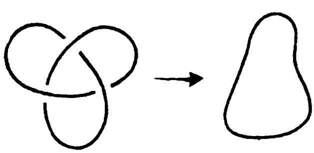
درموقعیت مشابهی، می‌توان گفت: سایهٔ یك‌خط راست، همیشه خطی راست وسایهٔ یك مثلث همیشه یك مثلث است، ولواین که‌فرض کنیم، زاویه‌های مثلث تغییر کنند. باوجـود این، درتوپولوژی، هیچ ضرورتی نداردکه یك‌خط راست، همیشه خط راست باقی بماند، بـا وجودی که ویژگی‌های «داشتن بستگی‌خطی و آزاد بودن دوانتها» را حفظ می‌کند. (ولی ممکن است موردهایی پیش‌آیدکه ویژگی اخیر وجود نداشته باشد. مثلا، اگراستوای یك‌کرهٔ مصنوعی بزرگ و یـا کـرهٔ زمین را، به‌عنوان خـط راست درنظربگیریم، با چنین موردی روبه‌روخواهیم شد. حرکت‌حشره‌ای که روی‌خطاستوا می‌خزد، به‌نظر ما، حرکت‌روی‌خطراستی است‌که انتها ندارد.) توپولوژی، باچنین بستگی وچنین پیوستگی سروکاردارد و، بنابراین، تنها تغییرشکل‌هایی درتوپولوژی مجازاست‌که جاهای به‌هم پیوسته را، ازهم جـدا نکند (مثلا، نمی‌توان «چیزی» را پاره یا سوراخ‌کرد) وآن‌چه راکـه ازهم جداست به‌هم نپیوندد (مثلا، نمی‌توان پارگی‌ها را بـه‌هـم وصل ویـا سوراخ‌ها را پرکرد).



شکل ۲

بنابراین قاعده، مثلا می‌توانیم از یک گلولهٔ گلی، فنجانی درست کنیم؛ ولی این فنجان، نمی‌تواند مثل فنجان‌های معمولی، دسته داشته باشد، زیرا برای درست کردن دسته، ناچاریم سوراخی در آن ایجاد کنیم. ولی اگر تکه‌ای گل را، به‌شکل نان حلقه‌ای، انتخاب کنیم، آن‌وقت، همان‌طور که درشکل ۲ نشان داده‌شده است، می‌توانیم فنجان دسته‌داری از آن بسازیم.

دقیق‌تر بگوییم: ایجاد بریدگی تنها به‌شرطی مجاز است که، در پایان کار، آن را دوباره مرمت کنیم. مثلا، به‌اعتقاد برخی ازمتخصصان توپولوژی، می‌توان حلقهٔ سیمی سمت‌چپ شکل ۳ را به حلقهٔ سمت راست تبدیل کرد، بدون این که بستگی‌های آن، ازنظرتوپولوژی‌به‌هم بخورد. روشن است که‌این تبدیل را، وقتی می‌توانیم انجام دهیم که، ابتدا، سیم را درحلقهٔ اول ببریم و، سپس، بعد از آن که به‌صورت‌حلقهٔ دوم درآمد، دوباره، نقطه‌های بریدگی را به‌هم وصل کنیم؛ و این، تبدیلی مجاز است. ممکن است به‌من اعتراض شود وبگویند که،حلقه



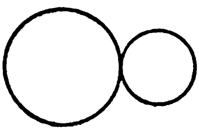
شکل ۳

اول را می‌توان، بدون پاره کردن آن، دریک فضای چهاربعدی،به‌حلقهٔ دوم‌تبدیل کرد. باوجود این، درمرحلهٔ نخستین مطالعهٔ ریاضیات،قاعدهٔ بالا بهترقابل فهم است: هرگونه بریدگی مجازاست، به‌شرطی که، سرانجام، همهٔ آن‌ها را جبران کنیم.

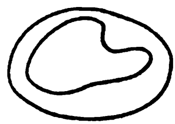
یک مثال دیگر: تکهٔ گلی که به‌صورت نان شیرینی حلقه‌ای

باشد، نمی‌تواند به‌یک بشقاب صاف بدون سوراخ، تبدیل شود. (خوب است، درهمین‌جا، یادآوری کنیم که‌چنین سطحی‌را، چنبره می گویند.) ویژگی‌هایی از نوع وجود یا فقدان سوراخ را، پایاهای توپولوژیک [انوارِیان‌های توپولوژیک] گویند. گاهی پیش می‌آید که، یك پایای تازه، نتیجه‌ای است از یك‌پایای دیگر، ولی دراین مرحلهٔ بحث، به‌این مطلب توجهی نمی‌کنیم.

قطعهٔ گل‌بدون سوراخ را، همبند ساده گویند. به‌سادگی می‌توان متوجه شد که: اگرروی چنین تکه‌ای (شکل ۴)، یك دایره (یا منحنی



شکل ۵

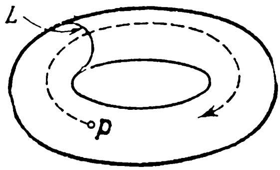


شکل ۴

بستهٔ دیگری) رسم کنیم، تمامی سطح، به‌دو بخش تقسیم می‌شود: بخش درونی وبخش بیرونی (روی یك‌صفحهٔ کاغذ هم، وضع به‌همین گونه است). به‌همین‌ترتیب، خط استوا، کرهٔ مصنوعی را، به‌دوبخش تقسیم می کند، اگرچه دراین‌جا، به‌سختی می‌توان گفت که کدام بخش «درونی» و کدام بخش «بیرونی» است، ولی دست کم، مثل قبل، دو بخش به‌وجود می آید.

اگردایرهٔ دیگری رسم‌کنید، یادایرهٔ اول را اصلاً قطع‌نمی‌کند ویا دونقطهٔ برخورد باآن دارد. وقتی که، در این‌جا، واژهٔ «برخورد» را به کار می‌بریم، منظورمان برخورد واقعی است و نه‌حالت مماس، آن‌طورکه در شکل ۵ دیده می‌شود. این وضع، به‌این مناسبت پیش می‌آید که، رسم دایرهٔ دوم را، ازنقطه‌ای واقع در بیرون اولی آغاز

می کنیم و، سپس، با بریدن دایرهٔ اول، به‌درون آن وارد می‌شویم و، بدون این که دوباره از آن خارج شویم، نمی‌توانیم رسم آن را تمام کنیم و، درنتیجه، به‌ناچار برخورد دوم را خواهیم‌داشت. همین استدلال برای موردی هم که‌رسم دایرهٔ دوم را ازدرون اولی آغاز کنیم،درست است.

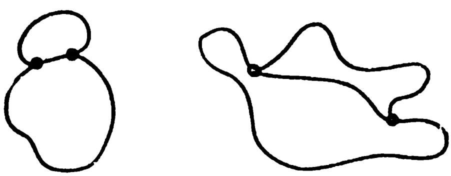


شکل ۶

اکنون به‌حالت چنبره می‌پردازیم (شکل۶). ابتداخط L رارسم می کنیم.می‌توان توجه کرد که، این‌خط، همهٔسطح را به‌دو بخش‌تقسیم نمی کند و، بنابراین، اگر رسم دایرهٔ دوم را از نقطه‌ای مثل P آغاز کنیم، این نقطه، نه در درون دایرهٔ L قرار دارد و نه در بیرون آن. بنابراین، اگر به L برخورد کنیم، می‌توانیم منحنی خط‌چین را، بدون این که دوباره به L برخورد کند، ببندیم.همان‌طور که روی شکل دیده می‌شود، دودایره وجود دارد که تنها در یک نقطه به‌هم می‌رسند. این حقیقت، که درحالت سطح همبند سادهٔ بدون سوراخ، نادرست بود، برای‌هرسطح‌سوراخ‌دار درست‌است و، درنتیجه، یك‌پایای‌توپولوژیك است.

همان‌طور که قبلا هم گفتیم، چنبره را می‌توان، به‌صورت هرسطحی که یك سوراخ داشته باشد ودایره را، به‌هرمنحنی بستهٔ‌بدون انتها که‌خودش را قطع نکرده باشد، تغییر شکل داد. این گونه منحنی

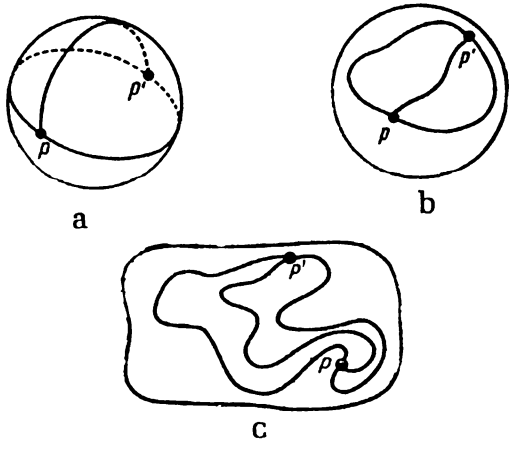
را منحنی ژردان گویند، به‌نام ریاضی‌دانی کـه ثابت کرد: ایـن منحنی سطح همبندساده (مثل صفحه یاسطح کره) را به‌دوبخش تقسیم‌می کند که دارای نقطهٔ مشترکی نیستند؛ ومـرز مشترك آن‌ها، برهمین منحنی واقع است. این‌حکم ممکن است روشن و بدیهی به‌نظر آید، ولـی اثبات آن،خیلی‌دشواراست. منحنی ژردان را،که موجب تقسیم‌سطح به‌دوبخش شود،روی چنبره‌هم می‌توان‌رسم کرد؛ تنها باید، این‌منحنی، آن‌طورکـه درمورد دومنحنی شکل ۶ دیده می‌شود، سوراخ را دور نزند و از آن عبور نکند. ولی روی صفحه یا سطح کـره، هرمنحنی ژردانی، همیشه سطح رابه‌دوبخش‌تقسیم‌می کند، درحالی که این‌حکم، درروی‌چنبره، برای هرمنحنی ژردانی درست نیست. اگـربتوان یك شکل (یا یك منحنی) را، باتوجه به‌شرط‌هایی کـه در این‌جا آوردیم، به‌شکل (یا منحنی) دیگری تبدیل کرد، می گویند که، این‌شکل‌ها (یـا منحنی‌ها)، نسبت به‌هم، همسان هستند.



شکل ۷

مثلثی راکه روی یك تکه‌گل رسم شده‌است، می‌توانیم، به‌طور همسان، طوری تغییرشکل دهیم‌که زاویه‌های آن ناپدید شوند و،مثلا، به‌یك دایره تبدیل شود. ولی، اگرجای راس‌ها را درنظر داشته باشیم، متوجه می‌شویم که، دروضع‌جدید، بازهم روی منحنی باقی می‌مانندو ضمناً (اگردرجهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت‌کنیم) درهمـان

ردیف قبلی قراردارند. به‌همین‌ترتیب، اگرشبیه شکل ۷ را رسم کنیم- که عبارت است ازدومنحنی که به‌وسیلهٔ دونقطهٔ مختلف خود به‌هم مربوط شده‌اند- هرتغییرشکلی از آن، که طبق قانون ما انجام گیرد، نمی‌تواند این نوع ساختمانی آن راتغییردهد. درهرتغییرشکل‌دلخواه، نه‌تنها دو نقطهٔ اتصال باقی می‌ماند، بلکه هیچ‌نقطهٔ تازه‌ای ازاین نوع هم پدید نمی‌آید، زیراوجود چنین نقطه‌ای، به‌معنای وجود خط رابط دیگری است. مثلا، اگراستوای سطح کره را درنقطه‌های p و p'، به‌وسیلهٔ خطی به‌هم وصل کنیم (شکل ۸-a)،درحالت‌هایی‌که به‌معنای توپولوژیك تغییرشکل دهد، همیشه شکلی به‌دست می‌آیدکه این ترکیب ساختمانی آن به‌جای‌خود باقی می‌ماند (شکل ۸-b و c).



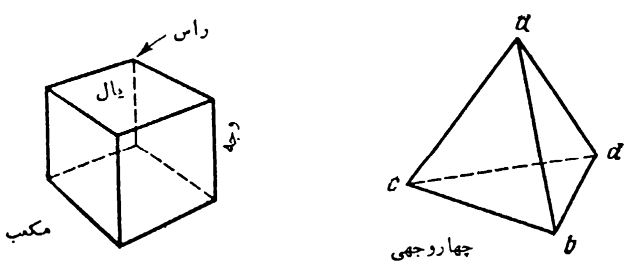
شکل ۸

شکل ۸-b، به‌این ترتیب ازشکل ۸-a به‌دست می‌آیدکه، با کوتاه‌کردن‌خط‌استوا، آن‌رابه‌یکی‌ازنیم‌کره‌هابکشانیم(شکل‌روی‌سطح را، می‌توان با دنبال‌کردن قانون‌های مربوط به‌خود، تغییرشکل‌داد).

می‌بینیم که شکل، بازهم مثل‌قبل، سطح را به‌سه بخش تقسیم‌می کند: مثل قبل‌ازسه‌پاره منحنی تشکیل شده‌است که، بازهم مثل قبل،به‌وسیلهٔ دونقطهٔ متفاوت، به‌هم مربوط می‌شوند. این ویژگی‌های بنیانی،ضمن هرتغییر شکل مجاز، باقی می‌مانند وتوپولوژی هم، درست با همین نوع ویژگی‌ها،کار دارد.

قضیهٔ اولر

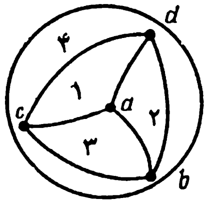
نخستین نمونــه از پایاهای توپولوژیك را، قضیهٔ لئونـارد اولـر ریاضی‌دان سویسی می‌دهد کــه، درسال ۱۷۵۲، آن را ثابت کرد. در این قضیه،گفت‌وگوازچندوجهی‌هاست، یعنی‌جسم‌های فضائی ازنوع مکعب یا چهاروجهی (شکل۹)که محدوداست به‌پاره صفحه‌ها (وجه‌ها) و، این وجه‌ها، دوبه‌دودرطول پاره‌خط‌های راستی (یال‌هـا) مشترك‌اند وهــریال دو رأس را به‌هم مربــوط می کند. می‌توانید چندوجهی‌های بغرنج‌تری را هم، بــا هرتعداد وجه، درنظر بگیرید، ولــی درهرحال، نمی‌توان تعداد وجه‌هــا را، از۴ (حالت چهاروجهی)کمتر گرفت. اولر ثابت کرد کــه در هرچندوجهی دلخواه، اگــر تعداد رأس‌ها را به‌تعداد وجه‌ها اضافه و، سپس تعداد یال‌ها را ازاین مجموع کم کنیم، همیشه،



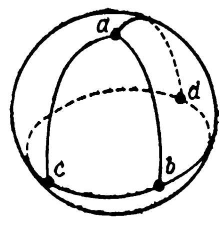
شکل ۹

عدد ۲ به‌دست می‌آید.

به‌جای این که، به‌اثبات این قضیه بپردازیم، آن را، درحال و هوای توپولوژیك، تعمیم می‌دهیم. از آن‌جا، نتیجهٔ اولر را به دست می‌آوریم و، علاوه‌برآن، می‌بینیم که‌چگونه، اثبات، به‌صورتی‌نامنتظر روبه‌روی ما قرار می‌گیرد. به‌یاد بیاوریم که در توپولوژی، می‌توان خط‌ها را خم و چهاروجهی را روی سطح کره رسم کرد (شکل ۱۰). مثل قبل (با شکل ۹ مقایسه کنید)، با ۴ وجه (که در این‌جا، مسطح نیستند، ولی محدب‌اند)، ۶ یال (که دراین‌جا خم شده‌اند) و ۴ راس سروکارخواهیم داشت. طبق قاعدهٔ اولر، ۴وجه‌به‌اضافهٔ ۴ راس، منهای ۶یال، برابر۲ می‌شود: $G-E+C=2$. سپس، شبیه شکل ۸-b، می‌توانیم همهٔ خط‌ها را (بدون این که پاره کنیم یا به‌هم بچسبانیم)



شکل ۱۱



شکل ۱۰

کوتاه‌تر کنیم وشکل ۱۱ را به‌دست آوریم. بازهم مثل قبل، دارای ۴ رأس (a، b، c و d) و۶ یال خواهیم بود. سه‌وجه اولیه، به‌مثلث‌های ۱، ۲، و۳، ووجه‌چهارم، به‌بخش بیرونی‌شکل‌مفروض، منجرمی‌شوند. این‌وجه‌چهارم هم، ازنظرتوپولوژی، یك مثلث است، زیرا به‌سه‌ضلع محدود شده است. همهٔ این‌ها را می‌توان، روی صفحهٔ کاغذ، رسم کرد (همهٔ چندوجهی‌ها را می‌توان به همین صورت نشان داد، اگرچه، در

بعضی موارد، شناختن آن دشوار است) ، به شرطی که به‌خاطر داشته باشیم که، «فضای‌خالی» اطراف‌شکل‌ما، همان‌وجه «ناپدید شده»است.

همان‌طور که‌گفتیم، می‌توانیم شیءِ را به‌شرطی تغییرشکل‌دهیم که روش‌ارتباط بخش‌های مختلف آن به‌یکدیگر(همبندی شیءِ)خراب نشود. درحالت چندضلعی، می‌توانیم زاویه‌ها را از بین ببریم، اگرچه باید رأس‌ها را، به‌عنوان‌نقطه‌هایی که روی‌محیط شکل مفروض‌علامت‌گذاری شده‌اند، حفظ کنیم. مثلا، پنج‌ضلعی شکل ۱۲ را می‌توان به‌شکلی تبدیل کرد که، دراین‌جا، نشان داده شده است، ولی درهردو

پنج‌ضلعی توپولوژیك

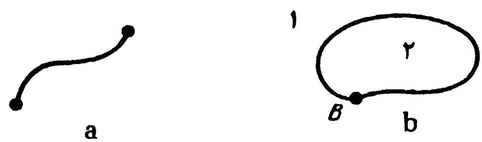
پنج‌ضلعی.

شکل ۱۲

حال، پنج رأس وپنج‌ضلع وجود دارد. قاعده‌هایی وجود داردکه، به‌کمك آن‌ها، می‌توان وجه‌ها، یال‌ها وراس‌های یك چندوجهی را به‌هم مربوط‌کرد. یکی از این قاعده‌ها این است که باید، دست‌کم، ۴وجه وجود داشته باشد؛ دیگری حاکی است که درهررأس، دست‌کم سه‌یال به‌هم رسیده باشند وغیره. ولی من می‌خواهم قاعدهٔ اولـر را، به‌نحوی تعمیم دهم‌که بتوان آن را دربارهٔ هرشکلی به‌کار برد، تنها با این شرط‌که، این شکل «هم‌بسته» باشد، یعنی به‌چندبخش جدا ازهم، تقسیم نشده باشد. اگرخطی (راست یا منحنی) دارای دو انتهای آزاد باشد،این دوانتها را، راس‌های آن به‌حساب‌می‌آوریم. به‌همین‌ترتیب،

درحالتی هم که دوخط یکدیگر را قطع کرده باشند، نقطهٔ برخورد آن‌ها را رأس می‌گیریم؛ ضمناً، چنین نقطه‌ای ممکن است، قبلاً هم، به‌عنوان رأس به‌حساب آمده باشد. هرحوزه‌ای را، که به‌یك خط بسته محدود شده باشد، و منجمله حوزهٔ بیرونی نسبت به‌این خط بسته را، وجه می‌نامیم. به‌جز این، فرض می‌کنیم که شکل، روی سطح همبند ساده رسم شده باشد (و نه مثلاً روی سطح نان شیرینی حلقه‌ای، زیرا دراین صورت، رابطه تغییرمی‌کند).

اکنون، باکمال شگفتی، می‌بینیم که، این تعمیم قضیهٔ اولر، خیلی ساده‌تر ازحالت خاص اصلی آن، ثابت می‌شود. درواقع، اثبات را روی این حالت کلی، ساده‌تر می‌توان دنبال کرد و، ضمناً روشن است که، با اثبات قضیه دراین حالت کلی، به‌خودی‌خود، قضیهٔ اولر دربارهٔ چندوجهی‌ها هم، ثابت خواهد شد. ازحالتی آغاز می‌کنیم که با یك خط سروکار داشته باشیم (شکل ۱۳-a). چون، این خط، دو انتهای



شکل ۱۳

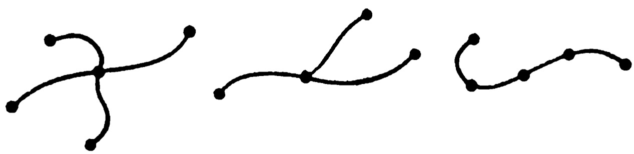
آزاددارد و، ضمناً، بسته نیست، بنابراین، ۱وجه (فضای دور و برخط)، ۱یال (خودخط) و۲ رأس خواهدداشت. برای این که معلوم شود، هر عدد معرف کدام‌یك ازموردهای وجه، یال ورأس است، حرفی راکه نمایندهٔ هریك از این موردهاست، زیر آن می‌نویسیم. مثلاً، ۲ به معنای۲راس است و، به‌همین مناسبت، حرف C را (که نمایندهٔ رأس

است)زیر آن می‌نویسیم. به‌این ترتیب، دراین‌حالت، به‌دست‌می‌آید:

$$\underset{G}{1} - \underset{E}{1} + \underset{C}{2} = 2$$

دو انتهای این خـط را به هم وصل می‌کنیم (شکـل b-۱۳). می‌بینیم که، یك رأس تشکیل می‌شود که، آن را، درهرجای خط‌بسته می‌توان انتخاب کرد. ازآن‌جا که خط جدید بسته است، تعداد وجه‌ها برابر۲، تعداد یال‌ها برابر۱ وتعداد رأس‌ها برابر۱ می‌شود:

$$\underset{G}{2} - \underset{E}{1} + \underset{C}{1} = 2$$



شکل ۱۴

اگر، به‌جای این‌که دوانتهای‌خط را به‌هم وصل کنیم،آن را با خط دیگری برخورد دهیم (شکل ۱۴)، ۱وجه، ۴یال و۵رأس به‌دست می‌آید:

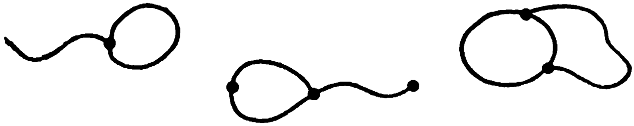
$$\underset{G}{1} - \underset{E}{4} + \underset{C}{5} = 2$$

اگرخط دوم را، به‌طورساده، به‌یکی ازنقطه‌های خط اول وصل کنیم، ۱وجه، ۳یال و۴ رأس به‌دست می‌آوریم ودوباره

$$\underset{G}{1} - \underset{E}{3} + \underset{C}{4} = 2$$

به‌همین‌ترتیب، اگرروی خط مفروض، تعـداد دلخواهی از رأس‌های تازه راعلامت‌بگذاریم، یال‌های تازه‌ای هم‌پدید می‌آید. مثلا،درحالتی که روی شکل ۱۴ نشان داده‌ایم، داریم:

۱ − ۴ + ۵ = ۲
G E C



شکل ۱۵

اگرخط تازه‌ای را درنقطۀ‌رأس‌خط بسته، به‌آن‌وصل کنیم (شکل۱۵)، به‌دست می‌آید:

۲ − ۲ + ۲ = ۲
G E C

اگرنقطۀ اتصال، به‌جای رأس، در نقطۀ دیگری باشد، رابطۀ ما به‌این صورت درمی‌آید:

۲ − ۳ + ۳ = ۲
G E C

به‌همین‌ترتیب، اگرخط تازه را، در دونقطه، به‌خط بسته گره بزنیم:

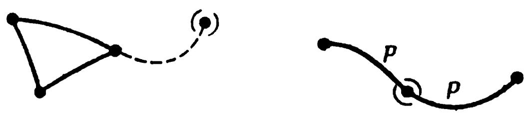
۳ − ۳ + ۲ = ۲
G E C

روشن است که برای تشکیل یک‌وجه تازه، باید دست‌کم یک یال اضافه کرد؛ این‌یال، یا باید در دوانتهای خود به‌شکل ما وصل‌شده باشد ویا خودش یک‌گره را تشکیل دهد، در غیراین‌صورت، حوزۀ تازه‌ای به‌دست نمی‌آید. با وجودی‌که، درتوپولوژی، می‌توان‌شکل‌ها را به‌صورت‌های مختلفی درآورد، در اثباتی‌که دراین‌جا می‌آوریم، هیچ تصویری را، بعد ازرسم، تغییرنخواهیم داد. بحث زیر را، درهر حالتی (و برای هرشکلی) می‌توان به‌کاربرد.

۱. اگرروی یال وبین رأس‌های آن، رأس تازه‌ای اضافه‌شود،

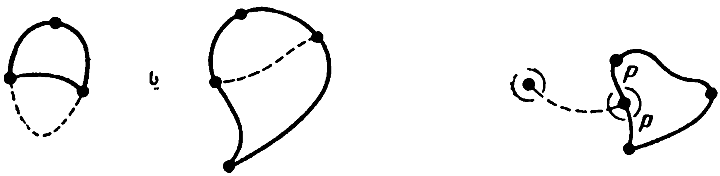
یـال را تقسیم می‌کند و، در نتیجه، یـک یال به‌دویال تبدیل می‌شود، یعنی به‌تعداد یال‌ها یك واحد اضافه می‌شود و، ایـن اضافه، به وسیلهٔ اضافه شدن یك واحد به‌تعداد رأس‌ها، جبران می‌شود. بنابراین، مقدار $G-E+C$ تغییر نمی‌کند (شکل ۱۶).

۲. اگر رأس یال تازه را به‌یکی از رأس‌های موجود وصل کنیم (شکل ۱۷)، رأس دوم این یال، یك واحد اضافی تعـداد یال‌ها را در $G-E+C$ جبران می‌کند.



شکل ۱۷   شکل ۱۶

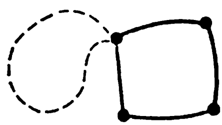
۳. اگر یال تازه‌ای را به‌نقطه‌ای واقع دربین دورأس یـک یال موجود، وصل کنیم (شکل ۱۸)، ۲واحد به‌تعداد یال و ۲ واحد به‌تعداد رأس‌ها اضافه می‌شود (یکی ازیال‌های قبلی به‌دویال تبدیل شده‌است) و، درنتیجه، مقدار $G-E+C$ بی‌تغییر می‌ماند.



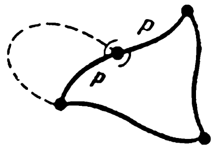
شکل ۱۹   شکل ۱۸

۴. اگریال تازه را طوری اضافه کنیم کـه، دوانتهای آن، به‌دو رأس موجود وصل شود (شکل ۱۹)، به تعداد وجه‌هـا و تعداد یال‌ها، هرکدام، ۱ واحد اضافه می‌شود (تعداد رأس‌ها تغییرنمی‌کند) و، در نتیجه، مقدار $G-E+C$ تغییر نمی‌کند.

۵. اگر یال تازه را طوری اضافه کنیم که هردو انتهای آن، به یکی از رأس‌های موجود وصل شود (شکل ۲۰)، یك واحد به تعداد وجه‌ها و یك واحد به تعداد یال‌ها اضافه می‌شود، که یکدیگر را جبران می‌کنند.



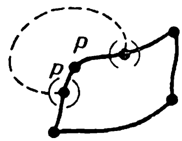
شکل ۲۰



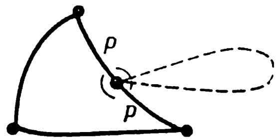
شکل ۲۱

۶. اگر یال تازه را طوری اضافه کنیم که یك انتهای آن بر یك رأس موجود و انتهای دیگر آن بر نقطه‌ای از یـك یال موجود (بین دو رأس آن) قرار گیرد (شکل ۲۱)، به تعداد وجه‌ها و رأس‌ها، هر کدام یك واحد و به تعداد یال‌ها، ۲ واحد اضافه می‌شود، کـه بازهم، یکدیگر را جبران می‌کنند.

۷. اگر یال تازه را طوری اضافه کنیم کـه، دو انتهای آن، به دو یال موجود ـ در نقطه‌هایی که بین رأس‌های آنها قرار دارند، وصل شوند (شکل ۲۲)، یك واحد به تعداد وجه‌ها، ۳ واحد به تعداد یال‌ها و ۲ واحد به تعداد رأس‌ها اضافه می‌شود که، درنتیجه، مقدار $G-E+C$ ثابت می‌ماند.



شکل ۲۲



شکل ۲۳

۸. اگر دو انتهای یال تازه را به نقطه‌ای واقع در بین دو رأس از

يك يال موجود وصل كنيم (شكل ۲۳)، به‌تعداد وجه‌ها ورأس‌ها، هر-كدام، يك واحد وبه‌تعداد يـال‌ها دوواحد اضافه مي‌شود و، درنتيجه، مقدار $G-E+C$ تغيير نمي كند.

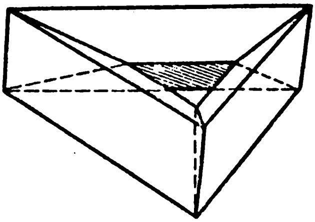
هشت‌حالتي كه دراين‌جا آورديم، تمام حالت‌هاي ممكن اضافه-كـردن يال‌ها و رأس‌هـا را دربرمي‌گيرند و، بنابراين، هـرشكلي را مي‌توان با استفاده ازبرخي ازاين روش‌ها رسم كرد. اگرشكلي مرتبط باشد و، ضمناً، روي يـك سطـح همبند ساده رسم شده باشد، در آن صورت، داريم: $G-E+C=۲$. بنابراين، ايـن دستور، براي چند-وجهي‌ها هم درست است. هرشكلي كه مايليد (به‌هراندازه كه غريب‌و پيچيده باشد) روي‌كاغذ رسم‌كنيد و درستي ايـن قضيه را، روي آن، تحقيق كنيد.

ضمن‌اثبات، براين مطلب تأكيدداشتيم كه شكل را روي‌سطحي رسم كنيدكه همبند ساده باشد. ولي، اگـربا يك چنبره سروكار داشته باشيم، برسر قضيهٔ اولر چه مي‌آيد؟ اگـر شكل ۶ را به ياد بياوريم، مي‌توانيم متوجه شويم كه قضيهٔ اولر، دراين‌جا، درست نيست. دوباره اين شكل را رسم مي كنيم (شكل ۲۴). براساس اين شكل، دراين‌جا هم، مي‌توان نتيجه‌گرفت:

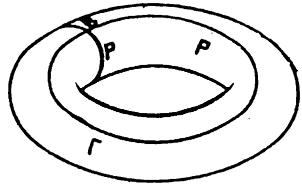
$$\underset{G}{۱}-\underset{E}{۲}+\underset{C}{۱}=۰$$

به‌موقع‌خود ديديم كه اگرمنحني ژردان را روي‌چنبره طوري‌رسم‌كنيم كه‌سوراخ‌رادربرنگيرد وازآن عبورنكند، آنوقت، اين منحني،چنبره را به‌دوبخش تقسيم مي كند. بنابراين، براي هرشكل مرتبطي كه‌روي چنبره باشد، سوراخ را دربرنگيرد و ازآن عبـور نكند، قضيهٔ اولر،

به‌قوت خود باقی خواهد بود. ولی، اگـر شکل مفروض، چندوجهی سوراخ‌داری باشد، درواقع، هم سوراخ را دربرگرفته است و هم از



شکل ۲۵



شکل ۲۴

آن عبور می‌کند و، اولرهم، درست به‌چندوجهی‌ها نظر داشت. ساده‌ترین چندوجهی سوراخ‌دار رادرشکل۲۵نشان داده‌ایم. این چندوجهی را به‌صورتی رسم کرده‌ایم که، همهٔ یال‌های آن، دیده می‌شود. در آن، ۹وجه، ۱۸یال و۹رأس وجود دارد که منجربه‌رابطهٔ زیرمی‌شود:

$$\underset{G}{۹} - \underset{E}{۱۸} + \underset{C}{۹} = ۰$$

بدون این‌که وارد بحث تفصیلی بشویم، یادآوری می‌کنیم که، ایـن رابطه، صورت تازه‌ای ازقانون اولر، بـرای سطح‌هـای همبند مضاعف است وبرای هرشکلی که روی‌چنین سطحی رسم شود، بااین شرط که دست‌کم یکی ازخطهای آن سوراخ را دوربزنند ولااقل‌یکی ازخطهای آن ازسوراخ عبورکند، درست است.

یادآوری می‌کنیم کـه قانون اولررا، می‌توان طوری تعمیم‌داد که همهٔ حالت‌ها را (که نیازی به‌مرتبط بودن آن‌ها هـم نیست) و از خط‌ها ونقطه‌ها تشکیل شده‌اند، دربربگیرد.

اگرازیك نقطهٔ واقع برصفحهٔ کاغذآغاز کنیم:

$$\underset{G}{۱}-\underset{E}{۰}+\underset{C}{۱}=۲$$

وهمهٔ بخش‌های ناقص و جدا ازهم را به‌حساب آوریم، می‌توانیم دستوراولررا به‌صورت $G-E+C-n=۲$ بنویسیم، که درآن، n عبارت است ازتعداد بخش‌های غیرمرتبط به‌هم (نقطه‌ها، خطها یا شکل‌ها)، منهای۱. خواننده می‌تواند، به‌یاری آزمایش، به‌درستی‌این رابطه قانع شود و کشف کند که، چرا رابطه، به‌این صورت درمی‌آید. وقتی که خود رابطه را می‌دانیم، اثبات آن بی‌اندازه ساده می‌شود (این رابطه، تنها برای سطح‌های همبند ساده، درست است).

۲

سطح‌های تازه

گاهی این مطلب مهم است که ازمیدان درنرویم: وقتی که یك متخصص ریاضیات عالی، دربارهٔ پیش‌پاافتاده بودن موضوعی صحبت می‌کند، نظرش این است که، این موضوع، به‌اندازهٔ کافی کلی نیست، بلکه مطلب خاصی است که، به‌هیچ‌وجه، حالت توپولوژیك را نشان نمی‌دهد. نظرریاضی‌دان نباید موجب نگرانی وناامیدی ما بشود، زیرا اوتنها به‌موضوع‌هایی علاقه دارد که درمرحلهٔ بالایی از انتزاع واقع باشند؛ ما هم به‌نوبهٔ خود، حق داریم به موضوع‌هایی علاقه‌مند باشیم که‌عینی وملموس باشند. اوممکن است بگوید که به‌ریاضیات خالص مشغول است، نه‌ریاضیات کاربسته، او «ریاضیات برای ریاضیات» را دوست دارد واز جست‌وجوی قانون‌مندی‌های کلی لذت می‌برد. دراین صورت، پاسخ می‌دهیم که، ما هم‌ازچیزهایی لذت می‌بریم که اوآن‌ها را «شگفتی‌های ریاضیات» نامیده است، همچون مدل‌هایی که باکاغذ درست می‌شود. گمان می‌رود که هرچه، چیزی محسوس‌تر باشد، به‌فراست ودرك ذهنی وشهودی ما، لطمهٔ بیشتری می‌زند؛ ولی، پاول

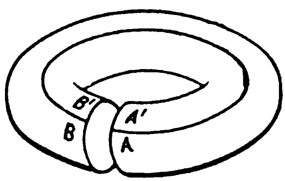
سرکه‌یه‌ویچ آلکساندروف، متخصص مشهور توپولوژی، به‌این‌مناسبت می گوید: «من مسألهٔ اصلی نظریهٔ مجموعه‌ای توپولوژی را، به‌این ترتیب، تنظیم کردم: ازدرك شهودی توپولوژی‌مقدماتی‌چند وجهی‌ها ومصالح آماده‌ای که وجود داشت، برای تعریف ساختارهای نظری-مجموعه‌ای‌استفاده کردم، این مصالح آماده‌به من‌کمك‌کردند تاساختارهای نظری ـ مجموعه‌ای را، حتی وقتی که خصلتی‌کاملا کلی داشتند، همچون شکل‌های هندسی، مورد مطالعه قراردهم».

با تکیه براین اندیشهٔ جان‌بخش، به‌سراغ مدل‌های کاغذی می‌رویم. ممکن است مواجه با اعتراضی براین اساس شویم که،کاغذ دارای یك ویژگی کاملا غیرتوپولوژیك است: آن را نمی‌توان کش داد. البته، این ادعاکاملا دقیق نیست، ولی به‌اندازهٔکافی، به‌حقیقت نزدیك است؛ با وجود این،کاغذ، به‌دلیل نازکی خود، نمونهٔ بسیار خوبی برای قابل انحنا بودن یك صفحهٔ دو بعدی است. عدم قابلیت کاغذ، برای کش آمدن، ازجهتی،حتی مفیداست، زیرا ما راوامی‌دارد تادرتعیین فاصله‌ها واندازه‌های واقعی، دقت لازم را به‌کارببریم.علاوه براین،تصورروشنی ازهرسمت آنرا به‌ما می‌دهد، درحالی که،درمورد یك قطعهٔ گلی، این تشخیص،کاردشواری بود.

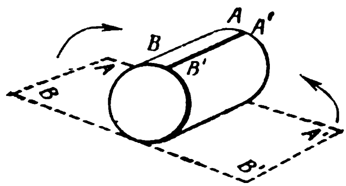
دیدیم که، سطح، می‌تواند همبند ساده باشد ویا، این ویژگی‌را، نداشته باشد. باچه معیار دیگری می‌توان سطح‌ها را ازهم تمیزداد؟ گفتیم که کره وصفحهٔ‌کاغذ، هردو، سطح‌های همبند ساده‌اند، ولی این دوسطح با هم فرق دارند. صفحهٔ کاغذ، به‌کناره‌های خود محدود می‌شود (مثل هرچندضلعی)، درحالی که، کره هیچ کناره‌ای ندارد. بنابراین، باآن‌که هرشکلی که روی سطح کره رسم شود؛ با یك شکل مسطحه‌همسان‌است، تمامی سطح کره، به‌عنوان یك واحدکامل،همسان

صفحه نیست، زیرا اگر سطح کره را با صفحهٔ کاغذ بپوشانیم، سوراخی به‌وجود می‌آید که، بدون یکی کردن کناره‌های کاغذ، نمی‌توانیم از آن نجات پیدا کنیم. به‌این ترتیب، وقتی که به‌ساختن مدل‌های کاغذی مشغول شویم، می‌بینیم که، با وجود کش نیامدن کاغذ، می‌توانیم به‌نتیجه‌های زیادی برسیم.

البته، نخواهیم توانست، از صفحهٔ کاغذ، کره بسازیم، می‌توانیم با آن، به‌مکعب برسیم که با کره همسان است: به‌همین ترتیب، می‌توانیم استوانه درست کنیم. برای این منظور، کافی است دو کنارهٔ روبه‌روی تکه کاغذ، یعنی AB و A′B′ را به‌هم بچسبانیم (شکل ۲۶).



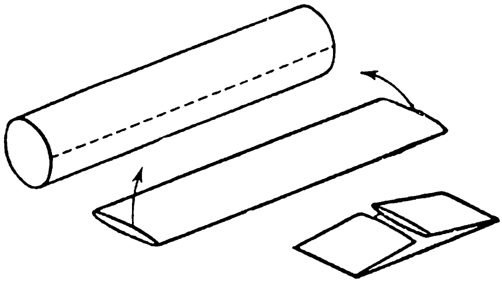
شکل ۲۷



شکل ۲۶

اگر استوانه‌ای بلند وقابل انعطاف دراختیارداشته باشیم، باوصل دوانتهای آن به‌یکدیگر، می‌توانیم یك چنبرهٔ توخالی به‌دست آوریم (شکل ۲۷)، ولی اریك قطعه کاغذ محدود قابل انعطاف، تنها به «چنبرهٔ تغییرشکل یافته‌ای» می‌رسیم که، البته، با سطح چنبره، همسان است. ابتدا توافق می‌کنیم که استوانهٔ پهن شده هم، همان استوانه است، زیرا ازنظر توپولوژی، به‌همان ترتیب استوانهٔ معمولی (که پهن نشده است)، ساخته شده است. با توجه به این موافقت، یك استوانهٔ بلند کاغذی می‌سازیم، آن را پهن می‌کنیم، دوانتهای آن را به‌طرف هم‌خم می‌کنیم و، آن‌ها را، با نوارچسب به‌هم می‌چسبانیم (همان‌کاری راکه

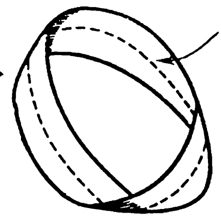
باکنارەها کردەایم). در این‌جا، یك لولهٔ پهن شده به‌دست می‌آوریم (شکل ۲۸).



شکل ۲۸

توجه کنید که می‌توان، دو انتهای گرد (ویا در این‌جا، دو انتهای مسطح) لوله را طوری به‌هم وصل کرد که سمت بیرونی یکی از دو انتها به‌سمت بیرونی انتهای دیگر وسمت درونی اولی به‌سمت درونی دومی، متصل‌شود. ولی، اگربه‌جای استوانه، ازیك نواراستفاده کنیم، دیگراین موقعیت طبیعی، ممکن است معنایی نداشته باشد. با وجود این، اگرنواررا، نیم‌دور بپیچانیم و، سپس،دوانتهای آن را به‌هم‌وصل کنیم، آن‌وقت دوطرف متقابل نوار درکنارهم قرار می گیرند. اگر کناره‌های متقابل نوار را، به‌این ترتیب، به‌هم وصل کنیم، شکلی به دست می‌آید که آن را در شکل ۲۹ نشان داده‌ایم و به صفحه یا نوار موبیوس مشهور است.۱۰ اگر در طول کنارهٔ این شکل حرکت کنیم، برایمان روشن می‌شود که، این کناره، یك خط پیوسته و بسته است (مثل یك گره)؛ و اگر با مداد، خطی در طول این صفحه رسم کنیم، متوجه می‌شویم که، این خط، به جای اول خود برمی گردد. نوار موبیوس، یك‌رویه ویك کناره دارد. این، نوع تازه‌ای از سطح است،

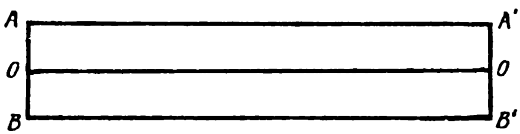
با نوع تازه‌ای از همبندی.



نوار موبیوس

شکل ۲۹

این سطح رامی‌سازیم و، ازوسط، درطول نوار، آن رامی‌بریم. وضعی نامنتظر، ولی کاملا منطقی، پیش می‌آید: با وجودی که، آنرا، درتمامی طول نوار بریده‌ایم، درنتیجهٔ کار، دوباره، به‌یك قطعه نـوار می‌رسیم. می گوییم، این نتیجه، «منطقی» است، زیرا وقتی که نواررا پیچاندیم، نیمهٔ بالای نواررا به‌نیمهٔ پایین آن چسباندیم: AO به B'O و BO به A'O (شکل ۳۰). برش مـا، این اتصال را خراب نمی کند. ما



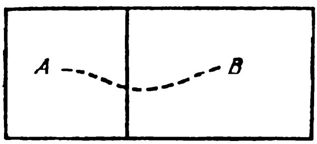
شکل ۳۰

بعـدا، دوباره، به‌این مـوضوع برمی گردیم و آزمایش‌هـای جالبی، درمورد آن، انجام می‌دهیم. می‌توانیم بگوییم که، شکل حاصل، تنها یك رویه دارد و، ازنظربیان، با چه دشواری روبه‌رومی‌شویم، وقتی که سعی می کنیم بگوییم: «دوطرف این شکل را نمی‌توان بـا دو رنگ مختلف، رنگ کرد، زیرااین شکل، تنها یك‌طرف (یا یك‌رویه) دارد» دورویه، یك‌رویه؟ ... ط ف ازسطح یك رویه؟... منظورچیست؟

این دوگانگی وتناقض، خیلی هم بی‌معنا نیست، ولی باید آن‌رامورد تجزیه وتحلیل قرار داد.

مسألهٔ جهت

اگـر عرشهٔ دوکشتی را به هم وصـل و به‌یکدیگر مهار کنیم، می‌توانیم بگوییم که، دوسطح، دریك سطح متحد شده‌اند، زیرا نقطه‌های A و B دوعرشه را می‌توان باخطی پیوسته به‌هم وصل کرد(شکل ۳۱). به‌همین‌ترتیب، وقتی که نواررا می‌پیچانیم ودوانتهای آن رابه‌هم می‌چسبانیم، در واقـع، رویهٔ بالائی نـواررا با رویهٔ پایین آن، یکـی کرده‌ایم. اگر نقطه‌ای را روی این نوار نشانه بگذاریم و،سپس،نوار

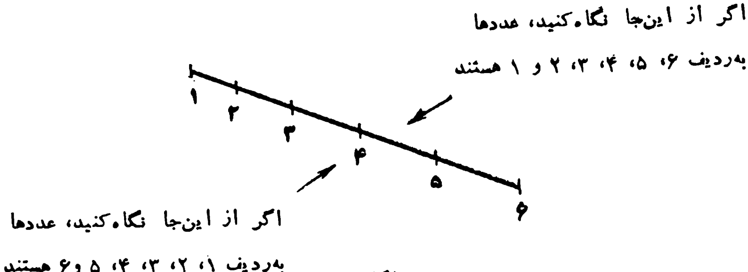


شکل ۳۱

را برگردانیم ونقطهٔ جدیدی، درست مقابل نقطهٔ قبلی، در آن طـرف نوارنشان کنیم، آن‌وقت، به‌یك مفهوم، این‌دونقطه، در«دورویهٔ مختلف» نوار واقع‌اند، درحالی که، به‌مفهومی دیگـر، می‌توان آن‌هـا را روی «یك‌رویه» به‌حساب آورد، زیرا می‌توان آن‌دو را، باخطی پیوسته به‌هم وصل کرد.

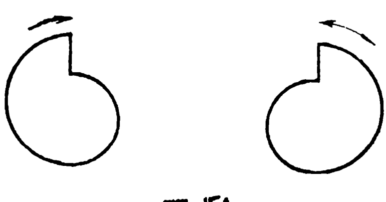
صفحهٔ کاغذ را مجموعه‌ای از بی‌نهایت نقطه می گیریم (ویـك صفحهٔ ریاضی، به‌همین‌معناست). وقتی که‌به‌این صفحه، پیچی‌نداده‌ایم، یك رویهٔ بالا داردکه ازبی‌نهایت نقطه تشکیل شده است؛ نظیر همین

نقطه‌ها درروبهٔ دیگر صفحه هم‌وجود دارد. ولی، چون ضخامت‌صفحه برابر صفراست، مجموعهٔ نقطه‌های اخیر، برمجموعهٔ اولی منطبق‌است: مجموعهٔ نقطه‌های پایین، همان مجموعهٔ نقطه‌های بـالا را تشکیل می‌دهند. با وجود این، مـا از دوطرف یا دو «رویهٔ» صفحه صحبت می کنیم.



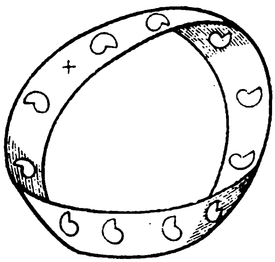
شکل ۳۲

اگر نقطه‌ها، به‌طورجداگانه، هیچ اندازه‌ای ندارند، پس از کدام رویه یا طرف آن‌ها می‌توان صحبت کـرد؟ چگونه می‌توان به‌آن‌ها جهت داد (ازراست به‌چپ یـا ازجلو به‌عقب)؟ البته، یك نقطه را نمی‌توان توجیه کـرد، ولی وقتی کـه باگروهی ازنقطه‌ها سروکار داشته باشیم، می‌توان جهتی برای آن‌ها قایل شد، زیرا ایـن نقطه‌ها به ردیفی قرار گرفته‌اند که، البته، این ردیف می‌تواند به‌عکس خود تبدیل شود: اگر به یك مجموعهٔ مفروض، از دوسمت یـا دورویهٔ مختلف نگـاه کنیم، آن‌هارا به‌ردیف‌های‌مخالف هم می‌بینیم (شکل ۳۲). این، مثالی‌است از توجیه‌خط، یعنی فضای یك‌بعدی.



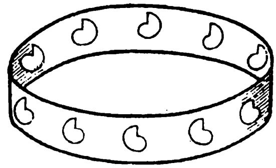
شکل ۳۳

حالا، یك صفحهٔ کاغذ برمی‌داریم وسوراخی حلزون‌مانند در آن به‌وجود می‌آوریم (شکل ۳۳). اگر کاغذ شفاف (کالك) دراختیارداشته باشیم، کافی است، به‌جای سوراخ کردن آن، تنها شکل مورد نظر را، به‌صورتی نمایان، روی آن رسم کنیم. اگراین صفحهٔ کاغذ را روی‌میز قراردهیم، به‌هرنحوی که آن‌را بچرخانیم، تازمانی که صفحه را پشت ورونکرده‌ایم، همیشه پیچ حلزون درجهت‌حرکت عقربه‌های ساعت باقی می‌ماند. ولی اگرصفحهٔ کاغذ را بر گردانیم، یعنی آن را پشت و رو کنیم، آنوقت، جهت پیچ حلزون تغییرمی‌کند و درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت قرارمی‌گیرد.



سطح یك‌رویهٔ نوار موبیوس

شکل ۳۵



سطح دورویهٔ استوانه

شکل ۳۴

اگرروی سطح کاغذی‌کره هم، چنین سوراخی را ایجادکنیم، متوجه می‌شویم که، جهت پیچ حلزون، برای دوحالتی که ازبیرون یا ازدرون کره به‌آن‌نگاه کنیم، فرق می‌کند. این‌حقیقت راروی‌استوانه، به‌جای‌کره، با سادگی بیشتری می‌توان آزمایش‌کرد (شکل ۳۴). اگر همین‌آزمایش را روی سطح نوارموبیوس انجام دهیم (شکل ۳۵)، می‌بینیم که تاجایی، سوراخ‌ها، رفتاری درست دارند، ولی لحظه‌ای فرامی‌رسد که به دو سوراخ مجاور می‌رسیم که جهت حرکت پیچ

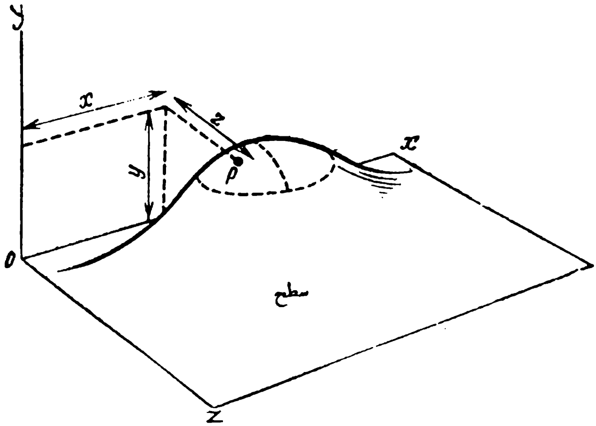
حلزونی آن‌ها تغییر می کند. این آزمایش نشان می‌دهد که نوارموبیوس، یـک‌سطح جهت‌دار(توجیه شده) نیست. دراین‌ویژگی نوارموبیوس، مثلا در مقایسه بـا ویژگی یک‌رویه بودن آن، سوء تفاهم کمتری پیش می‌آید. از این جا، می‌توان به این نتیجه رسید که : هر سطح دورویهٔ جهت‌دار است و هرسطح یـک رویهٔ جهت‌دار نیست.

مسألهٔ بُعد

وقتی کـه ازسه‌بعدی بودن فضای‌جسم و دوبعدی بـودن فضای صفحه صحبت می کنیم، منظورمان این است که، صفحه، طول وعرض دارد، ولی ضخامت ندارد. ولی، ضرورتی ندارد که سطح، به‌صورت صفحه باشد؛ مثل سطح کره.دو روش، برای توضیح این انحنا وجود دارد. یکی ازایـن روش‌ها، به‌استفادهٔ ازبعد سوم- ارتفاع- مربـوط می‌شود و، به‌کمك آن، جای هرنقطه ازسطح را مشخص می کنند.در شکل ۳۶، سطحی نشان داده شده است که، درمیانهٔ خود، به‌طرف‌بالا بلنـد شده است. جـای نقطه‌هـا را می‌تـوان با مختصات x، y و z آن‌هامشخص کرد؛ این مختصات معرف فاصلهٔ‌نقطهٔ O تا نقطهٔ‌مفروض، درسه‌جهت دوبه‌دو عمودبرهم، هستند.

در روش دوم، که‌ازنظرتوپولوژی مناسب‌تراست، به‌طورکلی، به‌بعد سوم تکیه نمی‌شود (اگرچه، بعدسوم، به‌صورتی ناآشکار،وجود دارد)، وازنقشهٔ سطح مفروض استفاده می کنند. اگر دایره‌ای راروی صفحه رسم‌کنیم، قطرآن را بکشیم و، سپس،طول‌های آن‌ها رااندازه بگیریم، معلوم می‌شودکه نسبت طول محیط دایره به طـول قطرآن،

برابراست با ... ۳/۱۴۱۵۹ = π. اگر همین عمل را با سطحی که در

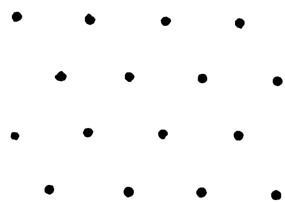


شکل ۳۶

شکل ۳۶ نشان داده‌ایم، انجام دهیم، قطر به‌مراتب بزرگتر از آب درمی‌آید (خط‌چین را ببینید). نقشهٔ دقیق ودرست امریکا را، می‌توان با یك رشته‌توضیح‌ها، دربارهٔمحل هرنقطه نسبت به‌نقطه‌های‌مجاورش، درست کرد، ولی چنین‌نقشه‌ای را نمی‌توان، باحفظ دقیق مقیاس،روی یك صفحه مسطح رسم کرد، زیرا (مثل کرهٔ مصنوعی) دروسط خود بالا می‌آید. لزومی ندارد، نقطه‌ها را با هرفوت یا میل نشان دهیم: کسی که به‌نقشه‌برداری از زمین مشغول است، می‌داند که، فلان قطعه‌ای که روی نقشه آورده است، مسطح نیست. شما نمی‌توانید،مثلا علامت زمین‌سنجی رادرمورد ایالت آیووا قراردهید و، دراطراف آن، علامت‌های تازه را طوری بگذارید که دقیقاً معرف ۱۰۰میل فاصله‌بین علامت‌های مجاورباشد. درشکل ۳۷، موضع علامت‌هایی نشانداده شده است که، روی صفحه، می‌توان آنها را، به‌طورنامحدود ادامه

داد، ولـی درروی نقشه، به‌همان نسبت کـه ازعـلامت نخستین دور می‌شویم، آغار به‌جمـع شدن وتمرکـز می کنند وردیف آن‌هـا به‌هم می‌حورد. سعی کنید این‌کار را روی یك سیب‌رمینی، به‌کمك مداد و «متر» اندازه‌گیری، انجام دهید.

درتوپولوژی، به‌توضیحی نیاز داریم‌که، هیچ تکیه‌ای، به‌فاصله نداشته باشد؛ بنابراین، هرسطحی را می‌توانیم روی صفحه نشان‌دهیم (با این شرط کـه همبند ساده باشد) و به‌مقیاس هم‌کاری نداشته باشیم. دراطلس‌های جغرافیائی هم، به همین‌ترتیب، عمل می کنند (و معمولا



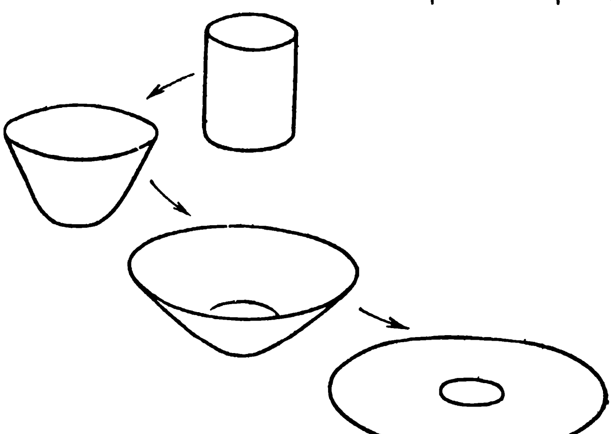
شکل ۳۷

به کمك تصویر مرکاتور)، ولی ضمناً، نسبت فاصله‌ها را، تاحد امکان، به حقیقت نزدیك می گیرند. اگرنتوانیم، با مشاهدهٔ مستقیم، به‌کروی‌بودن شکل زمیـن پی‌ببریم، دست‌کم می‌توانیم، بـا علامت گذاری نقطه‌ها واندازه‌گیری فاصله‌ها، به‌ایـن نتیجه برسیم. حتی اگر نتوانیم فاصله‌ها را اندازه‌گیری کنیم، می‌توانیم به‌این‌مطلب پی‌ببریم که،زمین، سطحی است با همبندی ساده. برای ایـن منظور، کافی است‌آن را با شبکه‌ای‌ازخط‌ها بپوشانیم وتعداد قطعه‌های بسته (وجه‌ها)، تکه‌خط‌ها (یال‌ها) ونقطه‌های انتهایی (رأس‌ها) را محاسبه‌کنیم. اگـرزمین، یك چنبرهٔ بزرگ بـود، وجود سوراخ راکشف می‌کردیم و یـا به‌رابطهٔ $G-E+C=0$ می‌رسیدیم.

به‌این ترتیب، توپولوژی به‌آن بخش ازساختمان یك سطح کار دارد که، در آن،ازمفهوم فاصله صرف‌نظرشده باشد؛ ولی اگربه‌تدریج فاصله را حذف کنیم، می‌توانیم به‌صورتی روشن‌تر، ماهیت امـر را درك کنیم.

بازهم دوسطح

تاکنون، باچند نوع سطح، مثل صفحه، استوانه، چنبره ونوار موبیوس آشنا شده‌ایم. در ضمن، استوانه را می‌توان، بـا تغییرشکل توپولوژیك، به‌قطعه‌ای صفحه با یك سوراخ، تبدیل کرد (شکل ۳۸). حلقهٔ اخیرـ که روی شکل ۳۸ دیده می‌شودـ با هرقطعه صفحه‌ای کـه یك سوراخ ودوکناره داشته باشد، همسان است. وقتی که می گوییم، یك صفحهٔ‌کاغذی چهارکناره دارد، به‌خاطر سادگی‌کار، آن را همچون یك‌چندضلعی درنظر می‌گیریم. ولی اگرچهارراس یـا چهارزاویه را فراموش کنیم، می‌توانیم ازیك کناره، که یك منحنی‌بسته‌است،صحبت



شکل ۳۸

کنیم. بیائید، یکبار دیگر، چهار سطحی را که داشتیم، بـانشان دادن تعداد رویه‌ها، کناره‌ها و، همچنین، خصلت اتصال آن (ضمن ساختن)، مورد بررسی قرار دهیم.

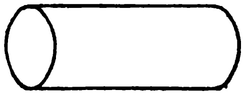
صفحه (مستطیل)

اتصالی وجود ندارد، دارای دو رویه وچهار کناره است (شکل ۳۹).

شکل ۳۹

استوانه

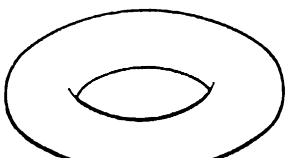
یکی از دوجفت کناره به هم وصل شده‌اند، ۲ رویه و ۲ کناره دارد (شکل۴۰).



شکل ۴۰

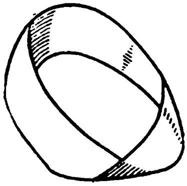
چنبره

هردو جفت کناره به هم وصل شده‌اند، دارای۲ رویه و ۰ کناره است (شکل ۴۱).



شکل ۴۱

یکی از دو جفت کناره بعداز پیچاندن به‌هم وصل شده‌اند، ۱ رویه و ۱ کناره دارد (شکل ۴۲).



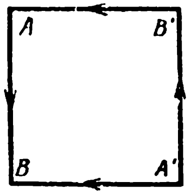
شکل ۴۲

هنوز از نظر منطقی، دو ترکیب دیگر از عمل‌های بالا وجود دارد: هردو جفت کناره به هم وصل شوند و، ضمناً، یکی از آن‌ها قبلاً پیچ خورده باشد؛ و هردو جفت کناره، و هردو با پیچش قبلی، به هم وصل شده باشند. ممکن است به‌نظر برسد که، هیچ کدام از این دو حالت، ممکن نیست، ولی یك متخصص توپولوژی واقعی، به این سادگی تسلیم نمی‌شود. مطالعهٔ همهٔ ترکیب‌های ممکن از این عمل‌ها (دقیق‌تر: تقریباً همهٔ ترکیب‌ها)، خصلت اصلی توپولوژی را نشان می‌دهد. در این جا، مسالهٔ اصلی، عبارت است از امکان منطقی وجود، و نه تحقق عملی آن‌ها. معلوم شده است که ، برای نخستین حالت از این دو مورد، می‌توانیم مدل غیر کامل و ناتمامی را بسازیم؛ و دربارهٔ حالت دوم، مدلی بازهم ناقص‌تر درست می‌شود. مدل اول به بطری کلین معروف است، به‌نام فه‌لیکس کلین (۱۸۴۹–۱۹۲۵)، ریاضی‌دان مشهور آلمانی. مدل دوم را صفحهٔ تصویری می‌نامند. نخست، به مدل اول بپردازیم.

بطری کلین

قبل ازهمه، باید کناره‌های AB و $A'B'$ رابه هم وصل کرد.

روی شکل ۴۳، نقطه‌هایی را که باید روی هم قرار گیرند، بایك حرف نامیده‌ایم. درمورد نوارموبیوس هم، به همین ترتیب عمل می کردیم، ولی دراین جاباید، به‌جز آن، دو کنارهٔ دیگر AB' و $A'B$ راهم به یکدیگر بچسبانیم. اندازه‌های واقعی در روی شکل ۴۳ نشان

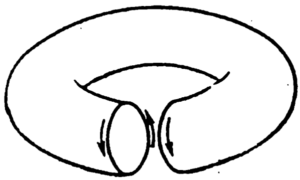


شکل ۴۳

داده نشده است ، ولی پیکان‌ها نشان می‌دهند که دو کنارهٔ اول را باید بعد ازپیچاندن به‌هم وصل کرد و دو کنارهٔ دوم را بدون پیچاندن. اگر خواننده تصمیم‌بگیرد، مدل‌کاغذی این‌شکل رابسازد، خواهد دید که، انجام این عمل‌ها، ناممکن به نظر می‌رسد. حتی اگر بخواهیم، برای ساده‌تر کردن اتصال، از کاغذ جدیدی استفاده‌کنیم، معلوم نیست که ، چه‌شکلی باید به‌این قطعه اضافی‌کاغذ داد! وقتی که می‌خواهید شکل‌را درست کنید، درموقعیتی شبیه‌به‌کسی قرارمی گیرید که، برای درآوردن کت خود، یك آستین خود را ازپشت درمی‌آورد، آن وقت، دوباره کت را می‌پوشد ودکمه‌های آن را می‌بندد.

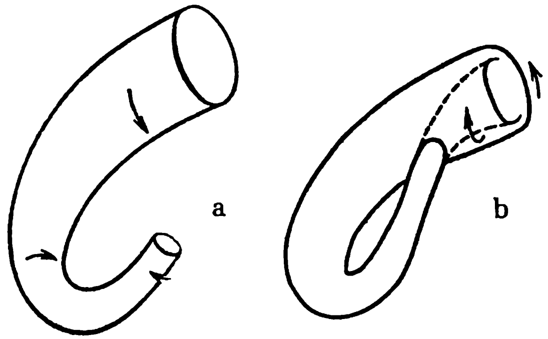
بهترین روش، برای رسیدن به راه حل مساله، این است که عمل‌ها را به ردیف عکس انجام دهیم. ابتدا، کنارهٔ بالا را به‌کنارهٔ پایین وصل می‌کنیم که، درنتیجه، یك استوانه به‌دست می‌آید (فرض می‌کنیم که، این‌استوانه،به‌قدر کافی، بلندباشد). اکنون،پیکان‌ها، جهت حرکت را ، روی دو انتهای دایره‌ای استوانه، نشان می‌دهند. اگر

استوانه را خم و دوانتهای آن را، به هم، وصل کنیم (که یك چنبره به دست می‌آید)، پیکان‌هایی که جهت حرکت را نشان می‌دهند، در توافق باهم قرارمی‌گیرند، یعنی جهت آن‌ها، یکی می‌شود (شکل ۴۴). بنابراین، نباید فراموش کنیم که، دراتصال دوم، ازپیچاندن استفاده‌ای نشده‌است، چراکه دراین‌جا، هرچهاراس دریك نقطه به‌هم رسیده‌اند (چیزی که چندان محسوس نسیت).



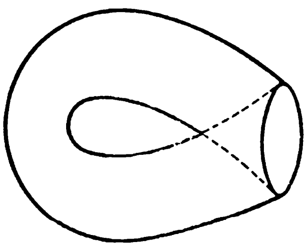
شکل ۴۴

عمل پیچاندن استوانه، به‌اندازهٔ نیم دور، به‌هیچ وجه هم‌ارز پیچاندن صفحه، قبل‌ازخم شدن آن، نیست، زیرا اگرحتی نقطهٔ A بر A′ قرارنگیرد، جهت پیکان‌هادرهردوانتها، برهم‌منطبق‌اند. به‌این ترتیب، مفهوم توافق پیکان‌ها وهم، مفهوم جهت یابی درسوراخ‌های حلزونی (که دربارهٔ آن هاصحبت کرده‌ایم)، مفهوم‌هایی‌اساسی هستند. با وجود این، مامی‌خواهیم دوانتهای دایره‌ای را، طوری به هم وصل کنیم که، پیکان‌های متناظر، درخلاف جهت یکدیگرباشند. دراین‌جا، پیچاندن، کمکی به ما نمی‌کند؛ باید راه دیگری پیداکنیم، مثلاً، دوانتها را، به صورتی که درشکل ۴۵ نشان داده شده است، به هم بچسبانیم. همان‌طور که می‌بینید، برای این منظور، باید یکی‌ازدوانتها را باریك‌ترکرد و آن را، ازسطح جانبی، به درون فرستاد. درشکل ۴۵ـ b بطری کلین، به صورتی که معمولاً نشان داده می‌شود، آمده



شکل ۴۵

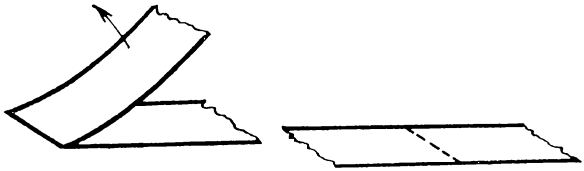
است؛ درشکل ۴۶، نمونهٔ متقارن‌تری ازهمین سطح، نمایش داده شده است. درحالت اخیر، اتصال دو انتهای دایـره‌ای ، همچون چیزی



شکل ۴۶

نوك تیز به نظر می‌آید (در محل متناظر آن ، روی سطح ، یك گره به‌دست می‌آید)، ولی نباید فراموش کرد که، درعمل، نمی‌توان چنین اتصالی را انجام داد. درحالت مدل کاغذی، وقتی که دوقطعهٔ سطح را به این ترتیب به‌هم وصل می کنیم، می‌توان تصور کرد که، آنها راست می‌شوند (شکل ۴۷)، باوجودی که، ایـن مطلب در واقعیت امر، اتفاق نمی‌افتد.

نوع دوم بطری کلین را، ساده‌تر ازنوع اول آن می‌توان، بـا کاغذ درست کرد وما، کمی بعد، به‌آن برمی گردیم. باید بـه‌خاطرداشته



شکل ۴۷

باشیم که اگردوقطعه صفحه، آن طور که درشکل ۴۷ می‌بینیم، به هم متصل شده‌باشند، هم‌رویه‌هایی که به‌یکدیگر تبدیل شده‌اند وهم‌رویه‌هایی که به یکدیگرتبدیل نشده‌اند، به‌هم متصل می‌شوند.

به سطح جدید دوم، یعنی سطح تصویری فعلاً نمی‌پردازیم، زیرا شبه مدل ناقص آن، چنان تخیلی‌است که تنها درپرتوبحث‌هایی که خواهیم داشت می‌توانیم دربارهٔ آن صحبت کنیم. دراین جا، تنها به این نکته اشاره می کنیم که، دراین ساختمان، نه‌تنها باید بخش‌های باقی‌ماندهٔ نوار موبیوس را به‌هم وصل کنیم، بلکه این اتصال، باید همراه با یك پیچ باشد، به‌نحوی که دوجفت‌کناره بعد ازیك پیچ به‌هم وصل‌شده باشند.درفصل بعد، نمونه‌های بیشتری از نوارموبیوس را، بدون هیچ هدف معینی، معرفی خواهیم‌کرد؛ تنها امیدواریم که، این بحث، درفهم محدودیتی که دراین‌جا برایمان ایجاد شده‌است، به‌ماکمك‌کند و، تاحدی، موجب جبران مدل‌های ناقص بشود.

آن‌جاکه (درشکل‌های ۴۵ و۴۶)، بنظرمی‌آید، سطح خودش را قطع کرده‌است، باید بتوانیم پیش خود تصورکنیم که، در واقع، چنین نیست وبرخوردی ازسطح باخودش وجود ندارد. (موضوع، در زندگی واقعی، به‌کلی نامفهوم است). دراین‌جا، این برخورد با خود، خصلتی به کلی غیرازبرخورد معمولی سطح‌ها دارد: این برخورد، به‌هیچ وجه، به‌این معنا نیست‌که، سطح، دارای بریدگی

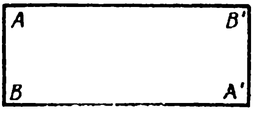
باشد. یعنی، در این برخورد با خود، هیچ بخشی از سطح مفروض، پیوستگی بخش دیگری از آن‌را خراب نمی‌کند. چنین وضعی، دریک مدل واقعی پیش نمی‌آید، ولی ازنقطه نظر ریاضی، کاملاً ممکن است. وقتی که ازطریق نقطه‌های این سطح حرکت کنیم، برایمان روشن می‌شود که، درهیچ لحظه‌ای، این تردید پیش نمی‌آید که، درجایی، ممکن است باوضعی شبیه نقطهٔ برخورد دوخط، روبه‌روشویم؛ ضمناً، این وضع، هم برای نقطه‌هایی که، برخورد کرده‌اند وهم برای نقطه‌هایی که باآن‌ها برخورد شده است، درست است.

این ناسازگاری روشن باآن چه که به‌طورمستقیم دیده می‌شود، تنها وقتی‌برای ما قابل درك خواهد بود که به مسالهٔ مجموعهٔ نقطه‌ها بپردازیم

۳

کوتاه‌ترین نوار موبیوس

معماها، گاهی به‌صورت آزمایش‌هایی عرضه می‌شوند که همراه بانتیجه‌هایی بسیارنامنتظر وشگفتی آورند. دراین جا، می‌خواهیم به‌مسالهٔ ساختمان واقعی نوارموبیوس بپردازیم و، ضمناً، ازکوتاه‌ترین نوارهای کاغذی، استفاده کنیم. وقتی که از «کوتاهی» صحبت می کنیم، منظورمان طول نواراولیهٔ کاغذی است. وقتی که نوار را نیم دور بچرخانیم و، سپس، عمل اتصال را انجام‌دهیم، طول تنها کنارهٔ نوارموبیوس، درست دوبرابرطول BA' ازنوار اولیه، ازآب درمی آید (شکل ۴۸). عرض نوارموبیوس، برابراست باطول کنارهٔ AB. قبل از آن که دنبالهٔ مطلب

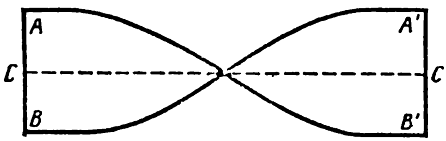


شکل ۴۸

را بخوانید، نواری ازکاغذ دردست بگیرید وببینید، تاچه حدمی‌توان آن را کوتاه گرفت که تاب نیم‌دورآن ممکن باشد (منظور ازتـاب

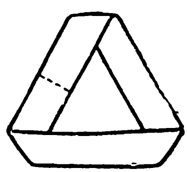
به اندازهٔ نیم‌دور، این است که، یکی‌ازدوانتها «پشت ورو» بشود) و، سپس، بتوان آن را چسباند.

بدون این که دراثبات‌های خسته کننده فرورویم، می‌توانیم بگوییم که، اگر کاغذ را تا کنیم و، سپس، به‌سختی فشاردهیم، آن وقت چین آن به‌صورت خط راست درمی‌آید. اگرصفحهٔ کاغذ، به واقع کش‌دار (لاستیکی) نباشد، نمی‌توانیم آن را طوری بپیچانیم که خط میانهٔ CC'، مستقیم باقی بماند (شکل ۴۹)، زیرا درغیراین صورت، کناره‌های AB' و $A'B$ ازنوار، درازتراز خط میانهٔ CC' می‌شوند.

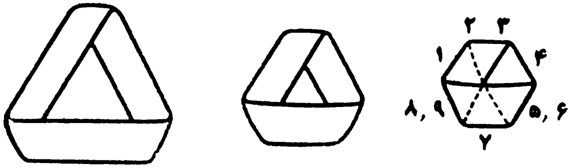


شکل ۴۹

ولی ماخیال نداریم، نوار را در موقعیتی که درشکل ۴۹ نشان داده شده است، باقی بگذاریم. می‌توانیم نوارمسطح را برداریم و آن

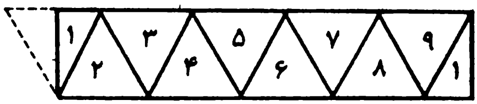

شکل ۵۰

را طوری خم کنیم که به صورت شکل ۵۰ درآید؛ ضمناً یک مثلث به دست می‌آید ونوارهم، همان طور که لازم است، نیم‌دورپیچ می‌خورد. می‌توانیم مثلث را، تا آن جاتنگ کنیم که سوراخ وسط آن ناپدیدشود (شکل ۵۱). دراین‌جا، باید ظاهراً، به‌مرحلهٔ حدی رسیده باشیم؛ ولی اجازه دهید به آزمایش واقعی بپردازیم ونواری کوتاه‌تر



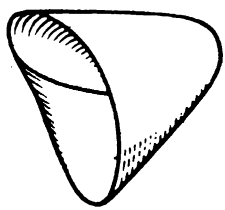
شکل ۵۱

ازاین نوار، انتخاب کنیم. محاسبهٔ هندسی ساده‌ای نشان می‌دهد کـه، نوارما، از ۹ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است (شکل ۵۲). نواری بـه‌اندازه‌های ۱۲ × ۴ سانتیمتر انتخاب کنید، آن را بپیچانید و، سپس، دوانتهای آن را به‌طرف هم بکشید وبانوارچسب بچسبانید. ضمناً شکلی به‌دست می‌آید که، کـم وبیش، شکل ۵۳ را بـه خـاطر



شکل ۵۲

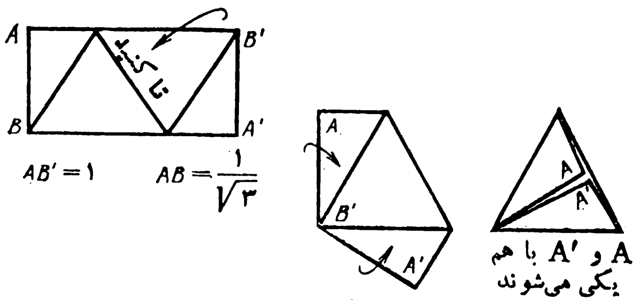
می‌آورد، تنهابخش‌هایی ازآن درمرکز روی هم می‌افتند، درحالی که قبل ازاین،چنین پوششی وجود نداشت.



شکل ۵۳

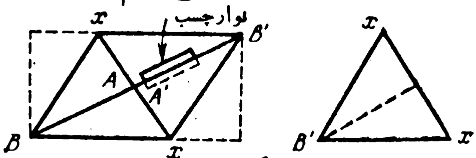
به‌سادگی می‌توانیم ازاین هم جلوتربرویم و نوار را آن قـدر کوتـاه کنیم که شکل حاصل، کـاملاً مسطح بشود. درایـن حالت،

نواری به‌دست می‌آید که ازسه مثلث متساوی الاضلاع متصل بـه هم، تشکیل شده است. ممکن است اعتراض کنید که، درایـن حالت، بـا مستطیل سروکار نداریم. ولی می‌توان قطعه‌ای را ازیك طرف برید و به طرف دیگرچسباند؛ درنتیجه، نواری به دست می‌آید که درشکل۵۴ نشان داده شده است. واکنون دیگر، به نظرمی‌رسد که به‌مرحلهٔ حدی رسیده‌ایم؛ به هیمن مناسبت، دست به‌آزمایش قطعی‌تـری می‌زنیم، و



شکل ۵۴

بررسی می‌کنیم که بایك نوارمربعی شکل، چـه می‌توان کـرد. ابتدا یادآوری می‌کنیم که نوارشکل ۵۴ را، به طریق دیگری هم، می‌توان جمع کرد (شکل۵۵). ابتدا، مثلث‌های کوچك را تـامی کنیم و آن‌ها رامی‌چسبانیم، بعدکاغذرا روی xx تامی کنیم. درنتیجه، به‌همان‌جایی

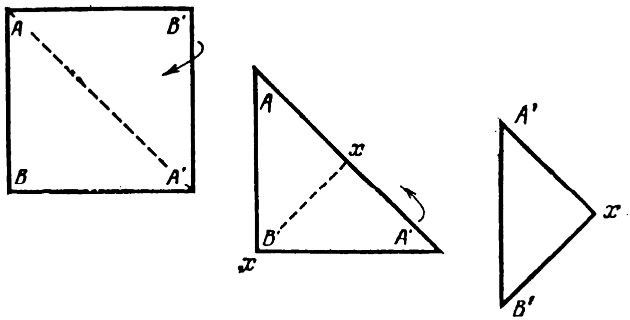


شکل ۵۵

می‌رسیم که درشکل ۵۴ نشان‌داده شده‌است، تنها هنوز به‌هم چسبانده نشده است. چسباندن را باید، دراین جا، از داخل انجام داد. بـرای این منظور، باید قبل‌ازآن‌که آخرین تارا انجام داده‌ایم، درجای لازم،

یك تکه نوارچسب بگذاریم. آیـا چنین عملی را می‌تـوان بـا مربع انجام داد؟

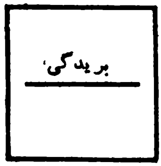
ابتدا آن را روی قطرتامی کنیم (شکل۵۶) وB را رویB′قرار می‌دهیم؛ بعد دوباره آن را روی قطر x x تامی کنیم وA رابرA′ قرار می‌دهیم. اکنون کناره‌های AB وA′B′ درهمان موقعیتی قراردارند که لازم‌داریم، ومی‌توانیم، آن‌ها را، ازبالای کنارهٔ AB′ ، که «دردرون» آن‌ها واقع‌است، به‌هم بچسبانیم (واژه «در درون»، خیلی‌دقیق نیست، زیرا کنارهٔ AB′ برهمان پاره خطی تصویـرشده استکـه کنارهـای ABوA′B′ تصویرشده‌اند). اکنون می‌دانیم که بایـك نوار مـوبیوس



شکل ۵۶

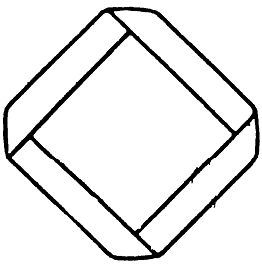
سروکار داریم، اگرچه‌نمی‌توانیم‌آن را باز کنیم وساختمان‌آن را مورد مطالعه قرار دهیم. باوجود این، درموقعیتی هستیم‌که می‌توانیم آن را درطول خط میانه‌ای‌که‌بامدادروی شکل ۲۹، رسم‌کردیم،ببریم وببینیم چه پیش می‌آید. توصیه می‌کنیم، این بریدگی را، قبل‌ازتا کـردن و چسباندن، تقریباً کامل (ونـه بـه طور کامل) ایجادکنید (شکل۵۷) و، سپس، وقتی‌که عمل چسباندن را انجام دادید، برش راکامـل کنید. منطق حکم می‌کندکه، نتیجهٔ حاصل، بایدیك تیکه باشد و، اگرکار را

با احتیاط کامل انجام دهیم و کاغذ را پاره نکنیم، می‌توانیم شکل را باز کنیم.

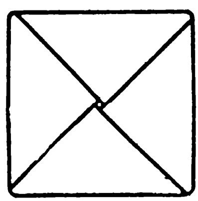


شکل ۵۷

بهتر است یك صفحهٔ بزرگ کاغذ انتخاب کنیم تا، درصورت پارگی، بتوانیم آن را، به کمك نوارچسب، تعمیر کنیم. از آن، مربعی درست می‌شود (شکل ۵۸) که دورویه دارد؛ تاهایی که روی آن وجود دارد، همان‌هایی هستند که درحالت نوار معمولی موبیوس می‌بریدیم و، سپس بازمی کردیم (شکل ۵۹). این کار را، ساده‌ترِ ازمورد نوار مثلث‌ها

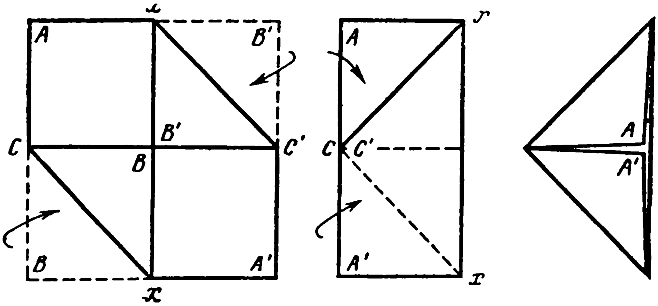


شکل ۵۹



شکل ۵۸

(شکل ۵۲)، می‌توانیم انجام‌دهیم. حتی لازم نیست، بامربع، به همان ترتیبی عمل کنیم که درشکل ۵۵ نشان دادیم. آن چه را که باید، دراین حالت، انجام دهیم، درشکل ۶۰ نشان داده‌ایم. ابتدا، راس‌های B و B' را به مرکز منتقل می‌کنیم. سپس، تمام شکل را درطول xx تامی کنیم، CB و C'B' را، که روی هم می‌افتند، به هم می‌چسبانیم. اکنون باید AC و A'C' را برهم قراردهیم و آن‌ها را به‌هم بچسبانیم. همان حالتی

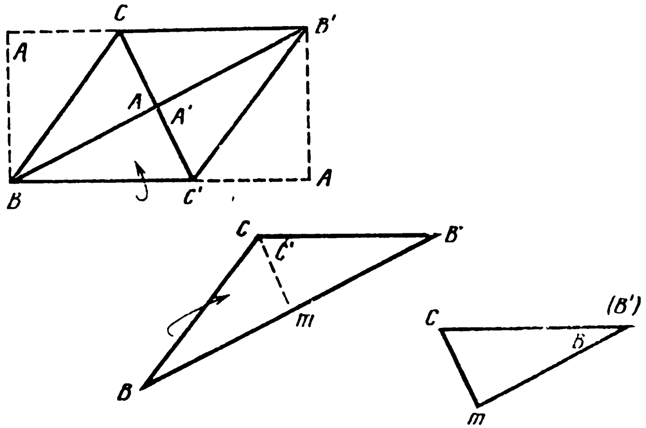


شکل ۶۰

را به دست می‌آوریم که درشکل ۵۶ نشان داده‌ایم، تنها بااین تفاوت که، به‌جای اتصال در روی وتر، باید عمل چسباندن را، دوبار در روی خط مرکزی، نیمی‌ازبیرون ونیمی از درون، انجام داد.

این، به‌هیچ‌وجه، به معنای‌بهتر کردن ویاتکمیل روش‌کارنیست، ولی‌جهت عمل‌های تازه را به مانشان می‌دهد. به‌شکل۵۵ برمی گردیم. با یکی کردن راس‌هادرمرکز، تای بعدی را درطول قطر BB' انجام می‌دهیم (شکل ۶۱). درنتیجه، قطعهٔ کناره‌های AC و $A'C'$ در داخل، روی هم قرارمی‌گیرند و، درآن‌جا، می‌توان آن‌ها را به‌هم وصل کرد؛ آن چه باقی می‌ماند این است که شکل را، درطول میانه Cm جمع کنیم که، درنتیجهٔ آن، B بر B' منطبق‌می‌شود و BC بر $B'C'$ می‌چسبد. به این ترتیب، توانستیم یک نوارموبیوس درست کنیم که، درآن، طول‌کمترازعرض است. می‌توان معلوم کرد که، دراین حالت، نسبت‌طول به عرض، برابراست با $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0/577...$.

آیا به‌نتیجه‌ای، بازهم بهتراز این، می‌توان رسید؟ پاسخ به‌این پرسش، مثبت است؛ باتعمیم بعدی این روش، می‌توان نتیجهٔ بهتری به دست‌آورد وازخواننده می‌خواهیم، هم باتجربه وهم به صورت

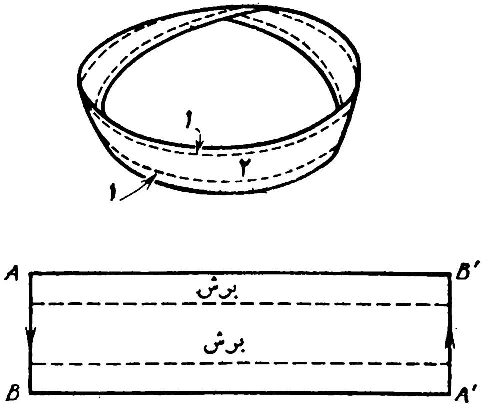


شکل ۶۱

نظری، خودش آن را به دست آورد. به‌این ترتیب، معلوم می‌شود که نوارموبیوس را با هرقطعه‌کاغذی‌که به دلخواه عریض‌باشد، می‌توان ساخت. روش‌کار را، مارتین گاردنر کشف کرده است که ما، آن را، درضمیمهٔ I درآخر کتاب‌داده‌ایم. ماازنوارموبیوس «به‌دلخواه‌عریض» صحبت‌می‌کنیم ونه نواری‌که «عرض نامتناهی» داشته باشد، زیرا در حالت اخیر، باید عمل تاکردن را بی‌نهایت بارانجام دادکه، این، نه به‌معنای تاکردن بلکه به‌معنای مچاله‌کردن است. چنین عمل‌هایی مجاز نیست، زیرا ازصفحهٔ مچاله شده کاغذ به‌هرشکلی‌که باشد، می‌توان هرچیزدلخواهی را ساخت ـ کاغذ شبیه لاستیك می‌شود.

بدیهی است، وقتی‌که نوارکوتاه‌تر از مربع باشد، نمی‌توانیم، بابرش درطول خط مرکزی، آن را باز کنیم (حتی‌درمورد مربع هم، این‌کار، بسیار دشوار است). می‌دانیم‌که، درحالت مربع، بعدازاین برش، نواری بادورویه تشکیل می‌شودکه چهارنیم‌دور، پیچ خورده است. اگرآن را روی صفحه پهن‌کنیم، شکلی‌به‌دست می‌آیدکه همهٔ

بخش‌های کناره‌ها، تامرکزراپرمی کنند (شکل ۵۸). وقتی که بانواری عریض‌تر سروکار داشته باشیم، جا برای پهن کردن کفایت نمی کند.



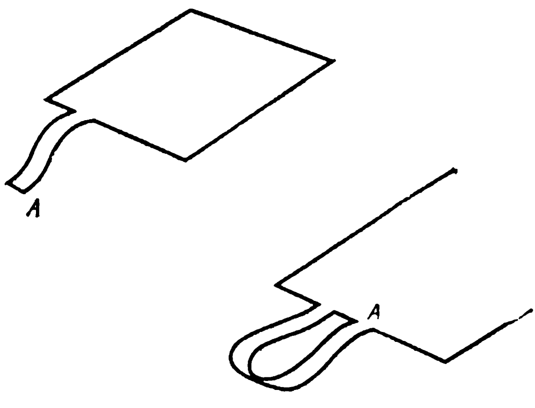
شکل ۶۲

درشکل ۶۲، نوارموبیوس و نمودارهمبندی متناظرآن (نوار) داده شده است. به‌کمك این شکل، مسالهٔ زیر را حل کنید. روی نوار موبیوس، خط راست پیوسته‌ای رسم کنید که دوبخش با مساحت‌های برابر به دست آید. خط نقطه چینی که روی شکل ۶۲ رسم کرده‌ایم، بااین شرط سازگاراست، چیزی که به خودی خود شگفتی‌آور است. ولی ما، دراین‌جا، یك شرط دیگر، به شرط بالا، اضافه می کنیم: برش، باید از کنارهٔ نوار موبیوس آغاز شود.

پاسخ را درضمیمهٔ II داده‌ایم.

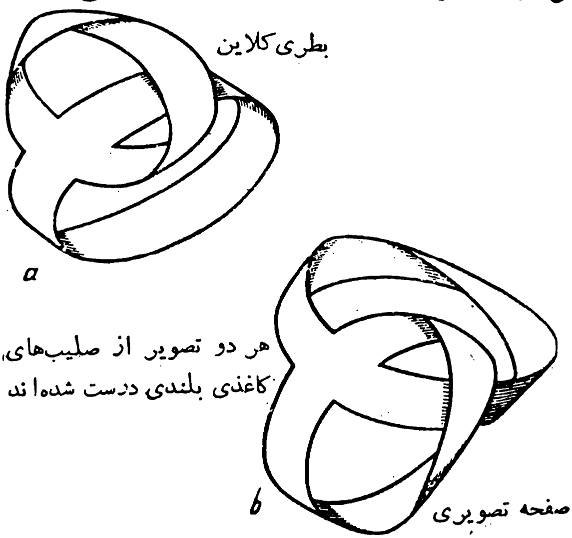
۴
نوار موبیوس مخروطی

درفصل قبل، به‌طور طبیعی، خود را به عمل بانوارهای مستطیلی شکل، محدود کردیم. اگر اجازه داشتیم، صفحهٔ کاغذ را، به شکلی که مایلیم، انتخاب کنیم، آن وقت‌می‌توانستیم صفحه‌ای بایك «زبانهٔ» کوچك برداریم، انتهای این زبانه را برگردانیم و آن را به‌بخش اصلی صفحه بچسبانیم (شکل ۶۳)، وهمین شکل حاصل را، نوار موبیوس بنامیم.



شکل ۶۳

البته، این بیان، به مفهومی، نادرست نیست، ولی اگر تلاش کنیم، از همین روش، برای موردهای بغرنج‌تری، مثل بطری کلاین یا صفحهٔ تصویری، استفاده کنیم، به مسیری پرخطر می‌افتیم. مثلاً، بنابر شرح بطری کلاین، همهٔ آن چه که ازما می‌خواهند، این است که دو کنارهٔ روبه‌رو را بعد ازنیم‌دور پیچ، ودو کنارهٔ رو به روی دیگر را بدون هیچ گونه پیچی، به‌هم بچسبانیم. روشن است که تصویر سمت چپ شکل ۶۴، با این شرط‌ها سازگار است، همان طور که تصویرسمت راست همین شکل‌هم، با تعریف صفحهٔ تصویری جور درمی‌آید.

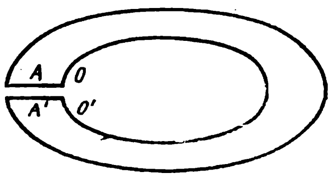


شکل ۶۴

مشکل کاردراین‌جا است که، هم درحالت بطری کلاین وهم در حالت صفحهٔ‌تصویری، فرض‌ما براین‌است که‌تمامی کناره‌های کاغذطوری به‌هم وصل شوند که یک سطح بدون کناره به دست آید: ضمن این‌عمل

به ناچار، حالت برخورد سطح با خودش پیش می آمد، چیزی که در شکل ۶۴ دیده نمی‌شود. (دربارهٔ بطری کلاین و صفحهٔ تصویری، در دوفصل بعد، به تفصیل صحبت خواهیم کرد.)

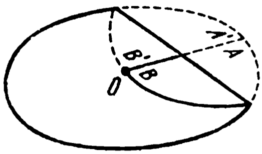
اکنون برای نوارموبیوسی کـه ازیك تکه‌کاغذ ساخته می‌شود، شرطهای اساسی دیگری قایل می‌شویم، که به تعداد کناره‌هایی مربوط می‌شوند که باید به هم بچسبند، و تنها با برقـراری این‌شرطها، شکل حاصل را، نوارموبیوس به حساب می آوریم. برای این که، موضوع را عمیق‌تر مورد بررسی قراردهیم، این‌پرسش را مطرح می کنیم: آیا نمی‌شود تعداد کناره‌ها را افزایش داد؟ ازحلقهٔ مسطح آغاز می کنیم، که در آن، یك برش شعاعی داده شده است (شکل ۶۵). روشن است که می‌توانیم یکی از دوانتهای AO و A'O' راببیچانیم و آن‌ها را به هم

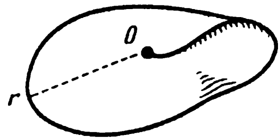


شکل ۶۵

بچسبانیم؛ درنتیجه، یك‌نوارموبیوس ازحلقه به دست می آید. پرسشی پیش می آید. بزرگی سوراخ، نسبت به‌قطر بیرونی، چقدر بایدباشد؟ آزمایش نشان می‌دهد که، این سوراخ، ظاهراً نمی‌تواند خیلی کوچك باشد، ولی درواقع، برای چسباندن، نیازی به‌سوراخ نیست. دایره‌ای با برش شعاعی درنظر می گیریم (شکل ۶۶، سمت چپ)، بخش A را به‌طرف بالا می‌آوریم وطوری خم می کنیم کـه نقطهٔ A روی مرکز

O قرار گیرد، سپس، بخش A' را بـه پایین خم می‌کنیم تا نقطهٔ A' روی O واقع شود. می‌توانیم بخش‌های بالایی A و B' و، همچنین، بخش‌های پایینی A' و B را به هم بچسبانیم (قطعهٔ B، زیر A قـرار دارد). با بازکـردن چین‌ها، به‌سطحی می‌رسیم کـه هم ارز بـا نوار



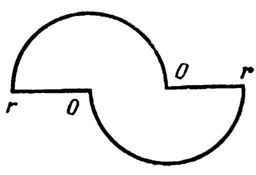


سطحی هم‌ارز نوار موبیوس

شکل ۶۶

معمولی موبیوس است (شکل ۶۶، سمت راست).

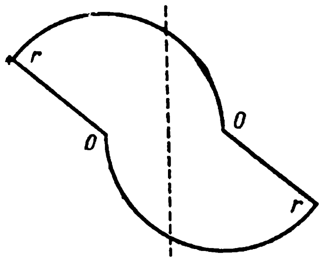
اگراین سطح را، روی‌شعاع جدید rO ببریم و آن را بازکنیم شکل ۶۷ به دست می‌آید. می‌توانستیم ازشکلی شبیه شکل ۶۸ آغاز کنیم و، بعد، کناره‌های rO را به هم بچسبانیم تا بـه همان نتیجه، و ضمناً بدون چین وچروك، برسیم. ولی آیا، دراین‌جا، حتماً لازم است که دایرهٔ کامل داشته باشیم؟



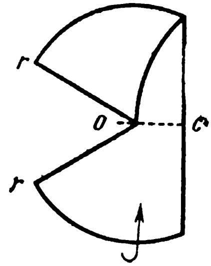
شکل ۶۸ شکل ۶۷

آیا اگر قطاعی را از قطعه‌ای بریده باشیم (نه این‌که فقط یك برش شعاعی داده باشیم)، می‌توان‌آن را، به‌صورت لازم، به‌هم وصل کرد (شکل ۶۸)؟

در این صورت، شبیه شکل ۶۷، به شکل ۶۹ می‌رسیم.



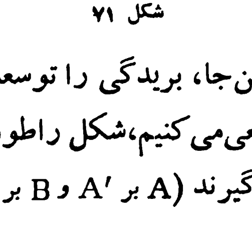
شکل ۶۹



شکل ۷۰

اگر شکل را درطـول خط قائم تا کنیم، نقطه‌های O روی هم قرارمی‌گیرند، سپس، با تاکردن شکل حاصل درطول Oc، کناره‌های rO برهم واقع می‌شوند (شکل ۷۰).

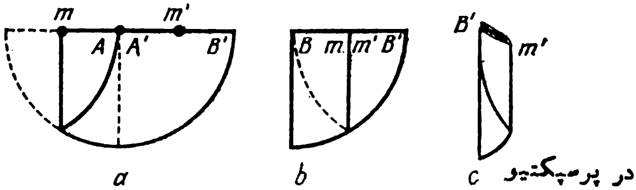
آزمایش نشان می‌دهد که، این کناره‌ها را، می‌توان، بازهم بیشتر ازهم دور کرد و، به‌همان ترتیب، به هم چسبانید، ولی این آزمایش، ما را به مسالهٔ زیادتر کردن تعداد کناره‌ها، نزدیك نمی‌کند. بنابراین، بـه همان روش اول برمی‌گردیم، که در آن، با یك دایره ویك برش‌شعاعی



شکل ۷۱

سروکارداشتیم. تنها دراین‌جا، بریدگی را توسعه می‌دهیم وباقطر، یکی می‌کنیم (شکل ۷۱). سعی‌می‌کنیم، شکل راطوری تاکنیم که کناره‌های BA و A'B' برهم قرارگیرند (A بر A' و B بر B'). برای این منظور،

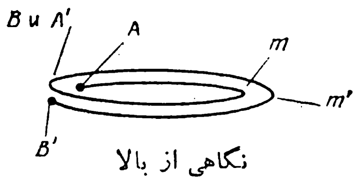
نقطهٔ A را روی مرکز قرارمی‌دهیم (شکل۷۲–a)، سپس یکبار دیگر، بخش تا شده‌را، شبیه‌شکل۷۲–b، تامی کنیم (بخش m را به‌طرف بالا تا



شکل ۷۲

می کنیم)؛ سرانجام دربالای B خم می کنیم (شکل ۷۲–c).

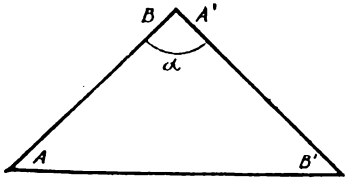
درواقع، نقطه‌های B و A′ بریکدیگر منطبق‌اند، ولی ما به‌این جهت برای آن‌هانام‌های‌مختلفی رادرنظر گرفته‌ایم که، هر کدام از آن‌ها، انتهای یکی از کناره‌های متناظر است. اگربه‌شکل تا شده، ازبالانگاه کنیم (شکل ۷۳)، متوجه می‌شویم که‌کناره‌ها، به ردیف درستی قرار گرفته‌اند ومی‌توان آن‌ها را وصل کرد.



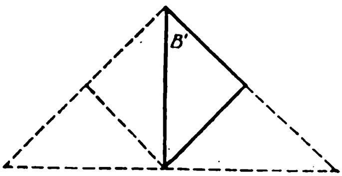
شکل ۷۳

فرم نیم دایره‌ای شکل اصلی، بیش ازاین معنایی ندارد (قبلاً با حلقهٔ اولیه، وداع گفته‌ایم)، ولی بخش‌هـای متصل به‌هم، هنوز چندان طولانی‌تر ازبخش‌های غیر متصل نیستند. ببینیم، آیا نمی‌شود زاویهٔ (بریدگی نخستین) را بیش از ۱۸۰ درجه گرفت؟ می‌توانیم کمان AB′

را طوری راست کنیم که یك مثلث به دست آید (شکل ۷۴). ولی آیا اکنون می‌توان AB را به A'B' چسباند؟

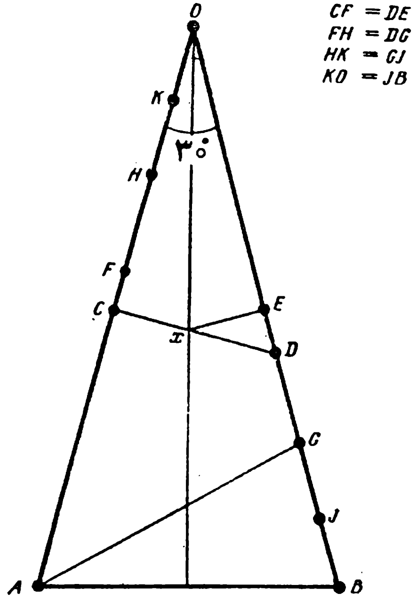


شکل ۷۴



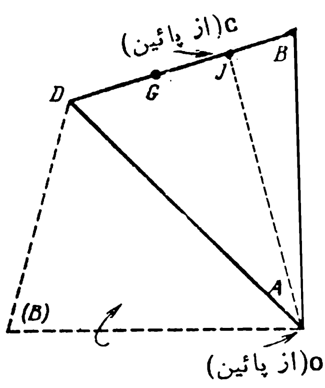
شکل ۷۵

اگر این عمل ممکن است، زاویهٔ α را تاچه‌اندازه می‌توان کوچك گرفت؟ وقتی که داشته باشیم $\alpha = ۹۰^\circ$ (حالتی که روی شکل ۷۴ نشان داده‌شده‌است)، می‌توانیم عین‌قبل عمل کنیم که، در نتیجه، به‌صورت‌شکل ۷۵ درمی‌آید؛ دراین‌جا هم، وقتی کـه از بالانگاه کنیم، به شکل ۷۳ شباهت خواهـد داشت. در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع ($\alpha = ۶۰^\circ$) هم، درست به‌همین ترتیب می‌توان عمل کرد، ولی وقتی‌که α را زاویهٔ کوچکتری بگیریم، کنارهٔ AB' ـ که‌نباید چسبانده‌شود، روی خودش چین می‌خورد ومانع کار به هم چسباندن می‌شود. این وضع، موقعیت کاملاً نا مطبوعـی ایجاد می‌کند، ولی دست کم، مانع ادامـهٔ کار مـا نمی‌شود: α را می‌توان تازاویهٔ ۳۰ پایین آورد و، ضمناً، نوارموبیوس را هم درست کرد ولی، جریان چسباندن، تقریباً به‌همان دشواری‌حالت آخر نـوار مستطیلی انجام می‌گیرد (و در واقـع، از آن هم بغرنج‌تر می‌شود) وما، دراین‌جا، به شرح آن می‌پردازیم. مدلی باکاغذ شفاف (کالك) می‌سازیم که ارتفاع آن، کمتر از ۲۵ سانتی‌مترنباشد؛ همهٔ نقطه‌ها

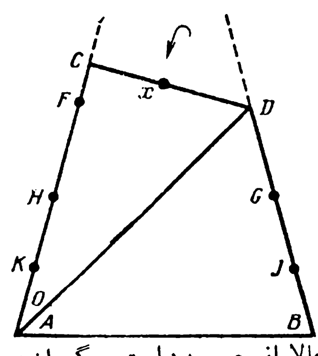


شکل ۷۶

را دردوطرف کاغذ، علامت‌گذاری‌می کنیم و، درهردو طرف، یال‌هایی را که باید به‌هم وصل کنیم، به‌صورت رنگی نشان می‌دهیم. با مداد



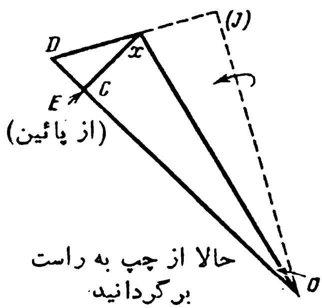
شکل ۷۸



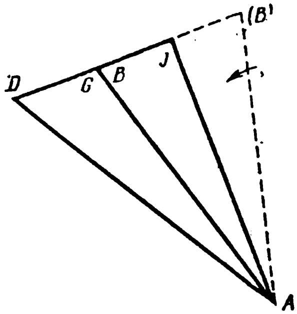
شکل ۷۷

شــکل ۷۶ را رسم و آن را می‌بریم (همهٔ نقطه‌ها، بــا حرف مشخص شده‌اند). رأس را با حرف O نشان می‌دهیم، که نقش نقطه‌های B و 'A را درمدل اخیر بــه‌عهده دارد. نقطهٔ C، وسط AO و نقطهٔ E ، وسط BO است.

O را، آن‌طور که درشکل۷۷دیده می‌شود، تامی کنیم؛ مدل را به طرف دیگر برمی‌گردانیم، بخش BOA را، از بالا، روی DA تــا می‌کنیم ومــدل را به حالت قبل برمی گردانیم (شکل ۷۸). اکنــون، کنارهٔ DO پنهان وبا DA، یکی می‌شود. BJA را به‌بالا، درطول JA،



شکل ۸۰

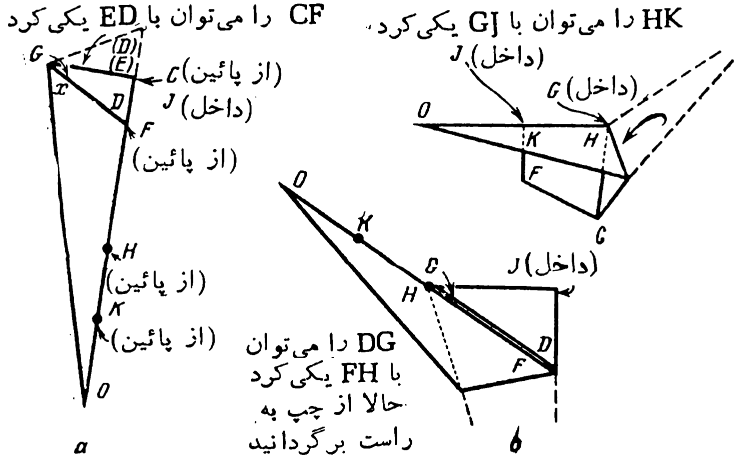


شکل ۷۹

تا می کنیم (شکل ۷۹)، سپس، یکبار دیگر BJA را بــه بالا، درطول CA، تامی کنیم (شکل۸۰). اکنون CA زیرلایهٔ اول قرار می‌گیردوبا CO یکی می‌شود، به‌همین ترتیب، بــا EO که CA را بــه آن ملحق کرده‌ایم، دوباره مدل را برمی گردانیم.

انتهای D را به‌طرف‌پایین‌تامی کنیم(شکل ۸۱ — a)، که‌پس‌از آن، می‌توان ED را با CF بخشی‌از کنارهٔ CO که‌درپشت واقع‌شده‌است ــ یکی کرد. درنتیجه، قطعهٔ AF با قطعهٔ DO یکی می‌شود (شکل ۷۶)؛

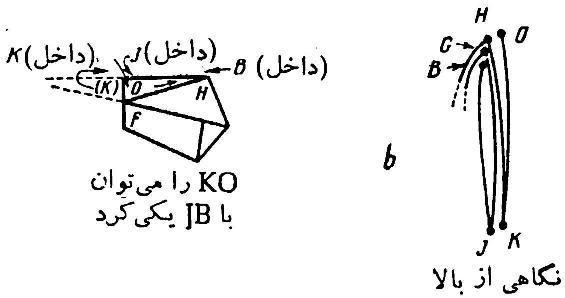
درپشت، قطعهٔ مناسب FO قراردارد، ولی‌قطعهٔ متناظر آن BD، به کلی



شکل ۸۱

از نظرپنهانست DG را می‌بینیم،ولی‌باوجودی که،بخش‌باقی‌ماندهٔمدل، GE را پوشانده است، می‌توانیم خود را به‌آن برسانیم. بخش‌پایینی‌را به‌طرف بالا تا می‌کنیم (شکل ۸۱ — b)، با افتادن H بر G، FH را با BG یکی می‌کنیم. شکل را برمی‌گردانیم (شکل ۸۱ — c) وHKO را به طرف چپ تا می‌کنیم وآن را با GJ (که در درون‌واقع است)یکی می‌کنیم.بعد دوباره، KO رابه‌طرف راست تامی‌کنیم (شکل۸۲ — a)؛ درنتیجه، کنارهٔ پایین، درموقعیتی قرار می‌گیرد که برای چسباندن مناسب است.

اکنون، اگر ازبالابه‌شکل نگاه‌کنیم (طرحی ازآن را، درشکل ۸۲ — b، رسم کرده‌ایم)، می‌بینیم که، چگونه HK با GJ، و دربیرون آن‌ها، KO با JB یکی می‌شود. و این تمامی روند راکامل می‌کند. نوارموبیوس حاصل،تنها ازنظرنام خود،مخروطی است؛ ولی درواقع



شکل ۸۲

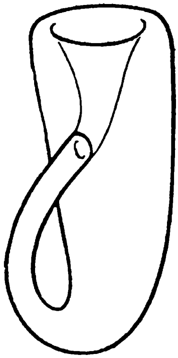
یك نوارموبیوس واقعی است.

اگر بازهم زاویهٔ α را کوچکتر کنیم، منجر به چین و چروك BJG در داخل می‌شـود. اجازه بدهید، در همـین‌جا، متوقف شویم. چه بسا که «دست‌های ماهری» پیداشود وبتواندمدلی با زاویهٔ کوچکتر α بسازد: من، آزمایش این کاررا، به‌عهدهٔ خواننده می گذارم. نتیجه‌ای که ازتمامی این گفت و گوها به‌دست می‌آید، این است که، هروقت تنها یك نوع تغییر شکل (تا کـردن) مجاز است، باید دائماً در انتظار رابطه‌های تازه وغیرقابل پیش‌بینی‌بـود. ضمناً این گمان هم بـه وجـود می‌آید کـه، اگرهم به هرگونـه تغییرشکلی مجازباشیم، بازهم، این رابطه‌ها، نتیجه‌ای از پایاهای واقعی به‌شمار می‌روند که قبلاً آن‌ها را ازنظر گذرانده‌ایم.

۵
بطری کلین

قبلا هم گفته‌ایم کــه، محل برخورد بطری کلین باخودش (شکل ۸۳) را می‌تــوان به دلخواه انتخاب کــرد، ضمناً، روی خط برخورد، نقطه‌ای وجود ندارد که متعلق به هردوبخش سطح مفروض («گلوی» باریك و تنهٔ اصلی) باشد. فرض براین است، قسمتی از تنه که در آن سوراخی به وجود آمـده است، پیوسته باقی می‌مانـد: سوراخ را تنها برای ساده‌تر بودن ساختمان عملی مدل درنظر گرفته‌ایم، ولی این‌طور به‌حساب می‌آوریم که، چنین سوراخی، وجود ندارد.

اگر با چشم، رویهٔ بیرونی سطح را دنبال کنیم، می‌بینیم که،این رویه، به‌گلو وهمهٔ بخش‌های سطح بستگی دارد. اگر از لبهٔ بالاآغاز کنیم، می‌توانیم، مثل یك حشره روی بخش بیرونی ویا در داخل گلو به‌طرف پایین حرکت‌کنیم. به‌این‌ترتیب، معلوم‌می‌شود که بطری کلین، جهت‌دار (توجیه‌شده) نیست (با جای مربوط به‌آن درفصل دوم مقایسه کنید). با وجود این، این‌وضع را می‌توانستیم روی دیاگرام شکل ۴۳ هم روشن کنیم.



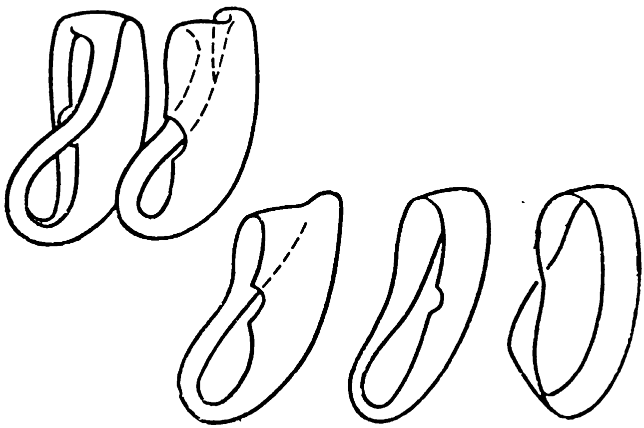
شکل ۸۳

زیرا پیچ نیم دور، که با پیکان‌های قائم نشان داده شده است، رویهٔ جلویی‌را به رویهٔ عقبی مربوط می‌کند و هیچ اتصال بعدی (یا قبلی)، با پیچ یا بدون پیچ، نمی‌تواند این خصوصیت را از بین ببرد بطری‌کلین، تنها یك رویه دارد.

ولی، برخلاف نوار موبیوس، دربطری‌کلین، کناره‌ای وجود ندارد: هرزوج از دو زوج کناره را به‌هم چسبانده‌ایم و، بنابراین، همهٔ نوار، به‌صورت یك وجهی درمی‌آید. به همین دلیل، به موقع خود، روی این مطلب تاکید کردیم که، برای ساختن بطری‌کلین (یا صفحهٔ تصویری)، باید همهٔ زوج کناره‌ها را به‌هم متصل‌کرد.

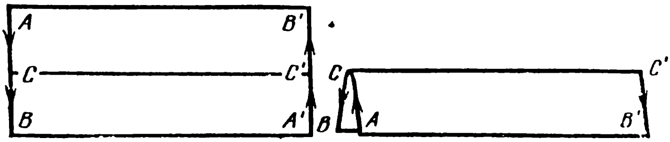
اکنون، به‌طورطبیعی، این‌پرسش‌پیش‌می‌آید: اگربطری‌کلین را از وسط ببریم ونصف‌کنیم، چه وضعی اتفاق می‌افتد؟ آیا در این‌جا هم، مثل حالت نوارموبیوس، یك بخش باقی‌می‌ماند، ولی این بخش دایرهٔ دوکناره خواهدبود؟ پاسخ، مربوط به این است‌که، برش را در کجا و چگونه انجام دهیم. اگرمدل کلاسیك (شکل ۸۳)، را،به‌طور متقارن نسبت به‌مرکزببریم‌دوبخش وبه صورتی غریب به‌دست می‌آید

که، ضمن آزمایش، معلوم می‌شود که چیزی جز نوارموبیوس نیستند: یکی به راست تاب خورده است ودیگری به‌چپ، به‌نحوی که می‌توان یکی را ازدیگری، با قرینهٔ آئینه‌ای، به‌دست آورد (شکل ۸۴). سطحی که درسمت راست نشان داده شده است، پشت سرهم، تغییرشکل داده است تا روشن شود که با نوار موبیوس همسان است.



شکل ۸۴

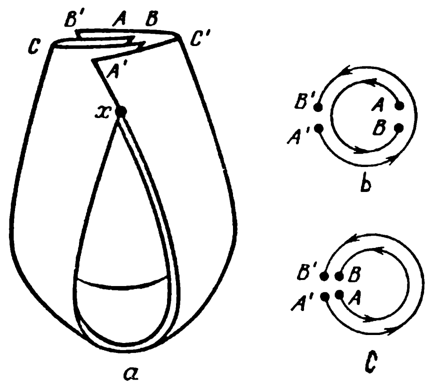
درواقع، ساختن مدل کلاسیك، بسیار دشوار است، بنابراین، اجازه‌بدهید به‌صفحهٔ کاغذ برگردیم وسعی کنیم‌نوع دیگری ازاین‌سطح را بسازیم. درشکل ۲۸، یك استوانهٔ کاغذی داشتیم که بازهم، بعداز پهن کردن آن (بافشار)، یك استوانهٔ توپولوژیك باقی‌می‌ماند. بنابراین، به مدلی برمی‌گردیم که درشکل ۴۶ نشان داده شده است و دراین باره مطالعه می‌کنیم که آیا نمی‌شود آن را، به‌صورت مسطح، ازکاغذساخت مثل‌قبل، نواررا درطول خط‌راست افقی تا می‌کنیم (شکل۸۵). اکنون



شکل ۸۵

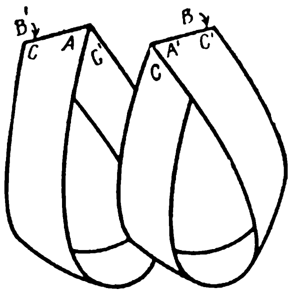
می‌توان کناره‌هـا را به‌هم چسباندویك استوانهٔ درست کرد، ولی‌فعلاً این عمل را انجام نمی‌دهیم. انتهای نوار را خم و آن را به‌طرف بالا تا می کنیم (شکل ۸۶ـ a) ویکی از دو انتها را درداخل دیگری فرو می کنیم.

می‌توان متوجه شد کـه‌گوشه‌های A′ و B′ درمجاور گوشه‌های A و B نیستند؛ درفصل دوم یادآوری کرده بودیم که، این وضع، هم برای استوانه وهم برای بطری کلین، وضعی کلاسیك است. کناره‌های A′B′ و AB (به مفهوم جهت حرکت) باهم‌ساز گارند. اگر از بالابه انتهای آن‌ها نگاه کنیم، وضعی را می‌بینیم که طرح آن درشکل۸۶ـ b داده شده است. به‌سادگی قابل فهم است‌که، این ساز گاری، باطرحی



شکل ۸۶

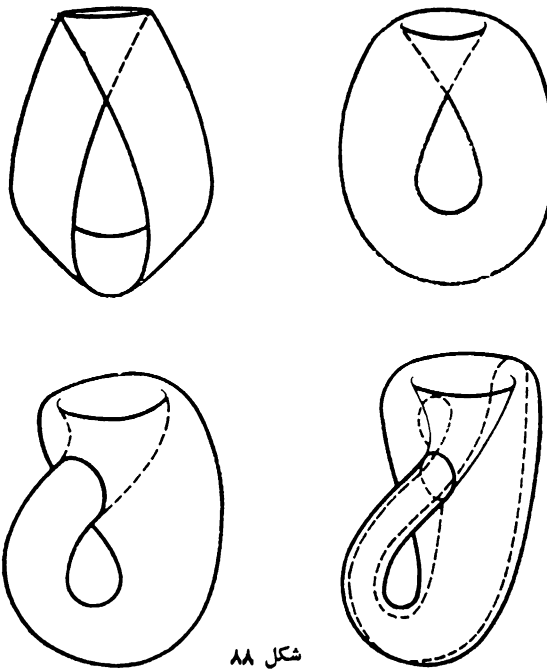
که درشکل ۸۶ــ c دیده‌می‌شود، شبیه است، که در آن، نقطه‌های متناظر کناره‌ها، روبه‌روی یکدیگرواقع شده‌اند. ولی، بعداز آن‌که کناره‌ها را تغییرشکل‌بدهیم و به‌هم‌بچسبانیم (که درنتیجهٔ آن، به‌صورت‌دایره‌ای درمی‌آیند)، تنها سازگاری یا ناسازگاری جهت‌های متناظر حرکت، برای ما اهمیت دارند.



شکل ۸۷

به‌شکل ۸۶ــ a برمی‌گردیم: کناره‌های A'C' و CB و، همچنین B'C' و CA را به هم می‌چسبانیم، سوراخ بین CB و CA را باقی می‌گذاریم (بخش بالایی گلوی بطری کلین) بخش برخورد با خود، عبارت است از فاصلهٔ x تا C. اکنون می‌توان دو قسمت کناره‌های درازتر را، که‌قبلاً به‌هم چسبانده‌بودیم، به‌هم وصل کرد (قطعه کناره‌های CB' و BA'، واقع‌درزیر x و، همچنین، درداخل، از x و به‌طرف بالا تا C)؛ درنتیجه، مدل کاغذی بطری متقارن کلین به‌دست می‌آید.

اگر، اتصال اخیررا انجام‌ندهیم و فقدان آن را، به‌عنوان بخشی ازبریدگی که درطول چین CC' ادامه می‌دهیم، به‌حساب آوریم، آن وقت، به‌همان دونوارموبیوس قبلی می‌رسیم که، یکی از آن‌ها، قرینهٔ



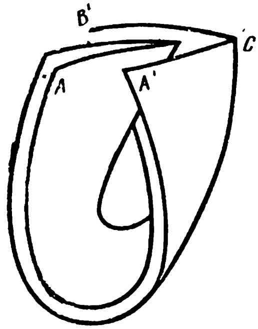
شکل ۸۸

آئینه‌ای دیگری است. دوباره یادآوری می‌کنیم، اتصال‌هایی راکه در بخش بالایی این‌نوارهای موبیوس، تحت زاویهٔ حاده، انجام داده‌ایم (شکل ۸۷)، می‌توان‌مثل بطری‌کلین، صاف‌کرد (درحالت بطری، این عمل صاف‌کردن، به‌صورت ذهنی است).

درشکل۸۸،تبدیل همسان‌این‌مدل به‌حالت معمولی‌تربطری‌کلین داده شده است. خط نقطه چین درروی شکل‌آخر، نشان می‌دهد که، برش را درکجا باید انجام داد تا دو نوار موبیوس به دست آید.

به‌خاطر بیاوریم‌که، برای اتصال‌کناره‌های AB و A′B′، باید قبلاً آن‌ها را جهت‌یابی‌کرد؛ اکنون، اجازه بدهید، آن‌ها را به‌نحو

دیگری ـ مطابق شکل ۸۶ــc ـ به‌هم بچسبانیم. برای این منظور، بخش $A'C'B'$ را، نیم دور می‌پیچانیم (شکل۸۹). می‌دانیم که، در این

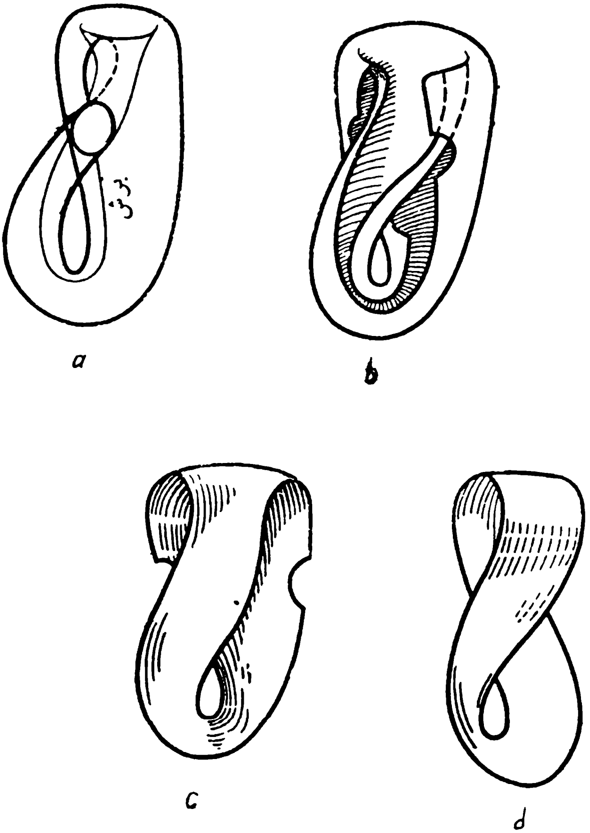


شکل ۸۹

صورت، جهت‌ها تغییر نمی‌کنند ولی اگر اکنون، باچسباندن ACB و $A'C'B'$ به‌یکدیگر، کناره‌های AB' و $A'B$ را آزاد بگذاریم ویکی ازاین قطعه‌های متصل نشده را به‌عنوان برش درنظربگیریم ومدل را باز کنیم، یك نوارموبیوس منحصر به‌دست می‌آید (با یک چین عرضی تند درطول $AA' - BB'$).

کشف این برش، در مدل معمولی، چندان ساده نیست: روی شکل ۹۰ــa می‌توانیم ببینیم که، بطری کلین، به دوبخش جداگانه تقسیم نمی‌شود. روی‌شکل‌های ۹۰ــb، ۹۰ــc و ۹۰ــd نشان‌داده شده است که چطور باید این مدل را باز کرد.

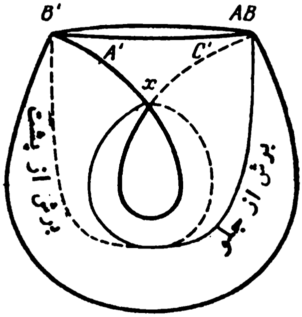
با این روش، دو آزمایش دیگرهم می‌توان انجام داد. تا این‌جا، برش درطول خط‌های‌طبیعی (وروشن)، یعنی‌درطول محل تا یا کناره‌های موجود، انجام می‌شد. اگر برش را به‌صورت قطری (یادقیق‌تر:



شکل ۹۰

به‌صورت مارپیچی) انجام دهیم، چه‌پیش می‌آید؟ مدل کاغـذی اول، یعنی مدلی راکه بعد از برش به‌دونوار موبیوس تبدیل می‌شد،انتخاب می‌کنیم،تنها دراین‌جا، برش را از گوشهٔ راست، $AC'B$، به‌پایین دور و بعد به طرف بالا درنقطهٔ x، به‌جای نقطهٔ C، وشبیه حالت قبل انجام می‌دهیم (شکل ۹۱). این برش را بایـد تنها درقسمتی ازسطح انجام دادکه روبه ما قراردارد، $CB-A'C'$؛ درغیر این صورت، هیچ‌چیز

جالبی به‌دست نمی‌آید (خودتان آزمایش کنید و، به درستی این مطلب قانع شوید). سپس، در رویهٔ پشت سطح، $C'B' - AC$، برش دیگری انجام می‌دهیم که از C به‌پایین، در اطراف و به‌طرف بالا نسبت به x، ادامه داشته باشد.



برش x_B از درون

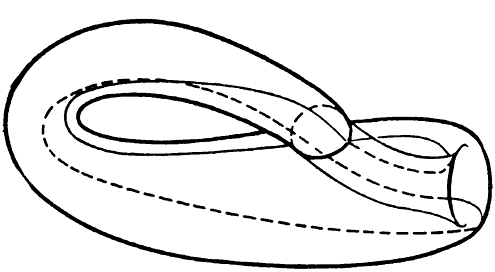
شکل ۹۱

درنظر داشته باشید که، همهٔ این‌ها را، روی مدلی انجام می‌دهیم که، در آن، همهٔ اتصال‌های لازم انجام گرفته است و، وقتی که دومین برش از برش‌های تازه را انجام می‌دهیم، با رسیدن به نقطهٔ x، برش‌ها باهم برخورد می‌کنند و اتصال درطول قطعهٔ xC خراب می‌شود. ولی وقتی، ضمن برش اول، به x رسیدیم، باید آن را به‌طرف بالا، و از درون، تا نقطهٔ B ادامه دهیم (شکل ۹۱).

کاری که، در این جا، انجام داده‌ایم، عبارت است از دو برش مختلف. هر یك از این دو برش، بسته و به شکل گره می‌باشند، ولی از نظر بطری کلین واقعی، از درون یکدیگر می‌گذرند، بدون این که هم را قطع کنند، زیرا روی قسمت‌های مختلف سطح مفروض قرار دارند. نتیجهٔ حاصل، کاملاً غیرقابل انتظار است: بعداز انجام این دو برش، یك قطعه

به دست می آید که دو رویه و، بنابراین، دو کناره دارد. می‌توان توجه کرد که، همهٔ این‌ها، هم‌ارز با حالتی است که، بطری کلین را به‌طریق قبلی ببریم (که به یك نوارموبیوس تبدیل می‌شود) و، سپس، نواررا درطول آن برش دهیم که، درنتیجه، یك گره به‌دست می آید.

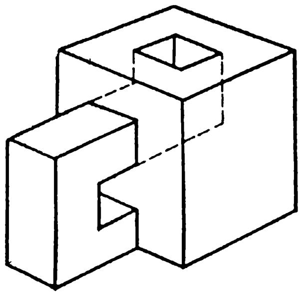
شکل ۹۱ دربخش پایین تغییرشکل داده است، ومثل این است که آن را، نه ازکاغذ، بلکه ازلاستیك ساخته‌ایم و، علاوه بر آن،تاب واتصال نوار، تخت نشان داده شده‌است، بدون این که به دورنمای آن توجه شود. ۲ برش ۱۱، دو کناره به وجود می آورند که، درنتیجه، یك قطعه سطح به دست می آید. روی شکل ۹۲، نشان داده شده است که، این برش‌ها را، روی بطری کلین معمولی، چگونه باید انجام داد. می‌توان متوجه شد که، یکی از آن‌ها، به طور نظری، از درون خطی می گذرد که خودش را قطع می کند؛ او از اطراف گلو درطول یك منحنی بستهٔ دلخواه که درهردورویه، به‌شکل سوراخ مشخص‌می‌شود، می گذرد(وگلو،به کناره‌های‌سوراخ،وصل نیست).اگرخواننده‌بخواهد



شکل ۹۲

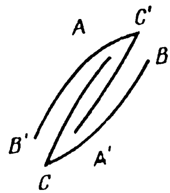
با این شیوه‌ها، مدلی غیرمسطح و از شیشه بسازد، نمی‌تواند (ضمناً، روی مدل‌شیشه‌ای، عملاً نمی‌توان‌برش ایجاد کرد)، بنابراین بهتراست

که، یك مدل کاغذی، از نوعی که در شکل ۹۳ دیده می‌شود، درست کند. با این که، این مدل، ظاهراً با بطری هموار کلین فرق دارد، ولی از نظر توپولوژی، هم ارز آن است. این مدل، ضمناً این برتری را هم دارد که می‌توان آن را برید. تصویری که برای ساختن این مدل لازم است درضمیمهٔ III داده شده است.



شکل ۹۳

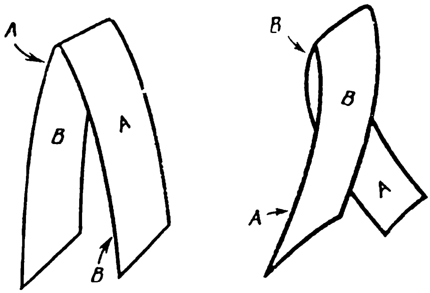
آزمایش دومی که می‌توان انجام داد، به اتصال $AC - C'B'$ و $CB - A'C'$ مربوط می‌شود. روی شکل ۹۴، حالت متناظر آن از بالا نشان داده شده است و، خود روش تشخیص آن، روی مدل معمولی، بسیار دشوار است بخشی که، آن را، گلو نامیده‌ایم، به‌طور کامل دردرون



سکل ۹۴

بخش اصلی قــرار نگرفته است: نیمی از هر بخش دردورن و نیم دیگر

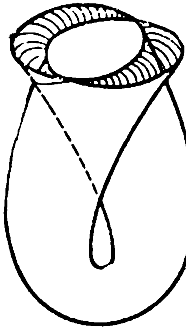
دربیرون واقع شده است. درحالت ایده‌آل وتصوری بطری کلین، این وضع، به‌مفهومی، برروش اتصال‌رویه‌بیرونی‌ودرونی‌تاثیرنمی‌گذارد. در شکل ۹۵ — a، دو صفحهٔ A و B، دورویه‌ای را نشان مـی‌دهند که باید



شکل ۹۵

به هم‌چسبانده شوند. اگر آن طور که نشان داده شده است، آن‌ها را بچسبانیم، A به A و B به B متصل می‌شود. روی شکل ۹۵ — b دیده می‌شود که تغییر سادهٔ وضع صفحه‌ها، اثری بر این حقیقت نمی‌گذارد: مثل قبل، A به A و B به B متصل می‌شود. ولی، وقتی که این مدل‌را بسازیم و، آن را به‌طورمتقارن، روی کناره یامحل تا، ببریم (شبیه‌آن‌چه درمورد مدل اول انجام دادیم)، به جای دونوارموبیوس آئینه‌ای، دونوار یکسان وقابل انطباق به دست می‌آوریم. ازطرف دیگر، اگر برش را قطری یا مارپیچی انجام دهیم، به‌یك‌نوار با دورویه، دو کناره و دوپیچ نیم دور می‌رسیم (دلیل این امررا، بعداً روشن خواهیم کرد).

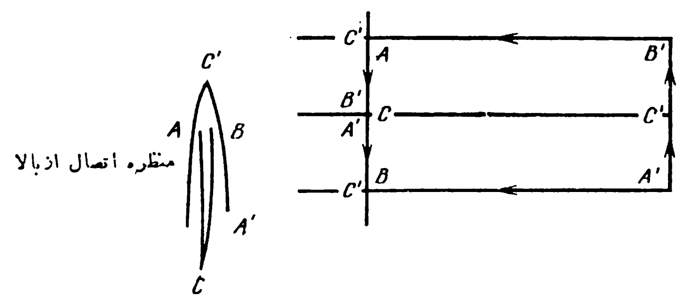
تلاش برای تصور برش این‌سطح، روی مدل کلاسیك بطری کلین، بی‌فایده است، زیرا، مدل کلاسیك، نمی‌تواند طرحی حقیقی‌تر، از نوع تازهٔ برخورد بـا خود، به دست دهدنزدیك‌ترین هم‌ارز آن، ازنظر هموار ی، درشکل ۹۶ داده شده‌است: دراین‌جا هم، مثل سایر مدل‌ها،



شکل ۹۶

تنها یك رویه وجود دارد، ولـی اتصال و برخورد با خود، کاملاً بـه دلخواه انجام گرفته است. درواقع، این مدل، به‌گـروه توپولوژیک معتبری تعلق ندارد و تنها به‌این‌درد می‌خورد که، به‌کمک آن،ریاضی‌دانی راکه به مدل‌های کاغذی علاقه‌ای ندارد، اذیت کنیم.

اکنون موقع آن است که، این مدل‌ها و حاصل برش آن‌ها را، فهرست کنیم. برای این‌منظور، همچون‌سابق، ازنموداراستفاده‌می کنیم. به‌خاطربیاورید که، وضع‌متفاوت اتصال‌ها یاگوشه‌هایی که،تحت آن‌ها، برش مدل‌را انجام می‌دهیم، اثرچندانی‌بربطری کلین‌ندارند (به‌استثنای مدل آخر)، در حالی که روش‌برش، بر آن، تأثیر می گذارد. در زیر،

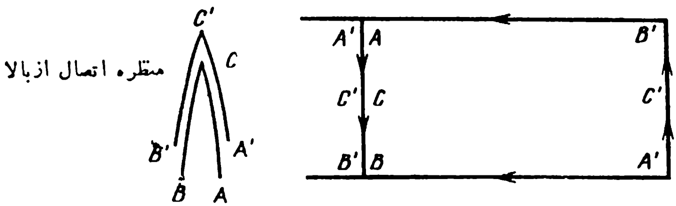


شکل ۹۷

نمودارها وبرش‌ها، برای هرمدل، داده شده است.

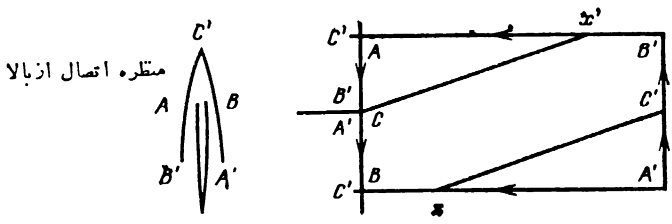
۱. برش درطول AB' و CC': دونوارموبیوس آئینه‌ای به دست می‌آید (شکل ۹۷).

۲. یك برش (فقدان اتصال AB' به $A'B$): یک نوارموبیوس به دست می‌آید (شکل ۹۸).



شکل ۹۸

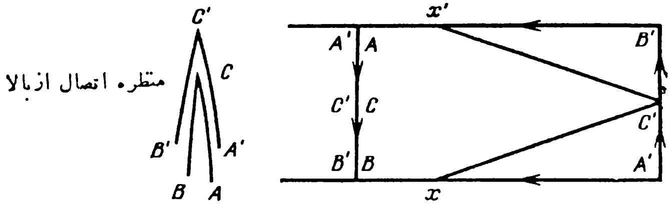
۳. دوبرش Cx' به xC': یک‌نوار با دورویه، دوکناره وچهار پیچ نیم دور به دست می‌آید (شکل ۹۹).



شکل ۹۹

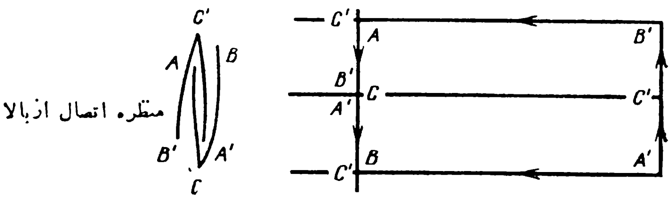
۴. برش ازهردوسطح می‌گذرد ویک قایق بومیان پولینزی را تشکیل می‌دهد(شکل ۱۰۰).

۵. یک برش درطول AB'، ولی‌چون AC به $C'B'$، باتوجه به جهت‌های مخالف کناره‌های $CB-AC'$، چسبیده است، درنتیجه،



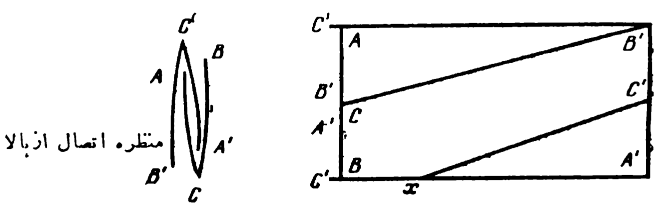
شکل ۱۰۰

دونوار با جهت‌های یکسان، یعنی دونوارموبیوس متحد به دست‌می‌آید (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۱

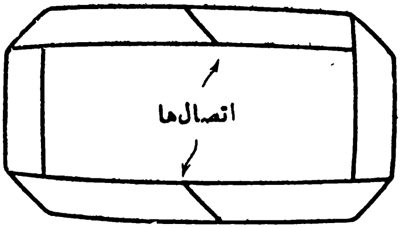
۶. دوبرش CB' و xC': یک نوار با دو رویه، دوکناره و دو پیچ‌نیم دور به دست‌می‌آید (شکل ۱۰۲).



شکل ۱۰۲

بعدازبازکردن وتخت کردن‌آن، به‌شکلی می‌رسیم که درتصویر

۱۰۳ نشان داده شده است.



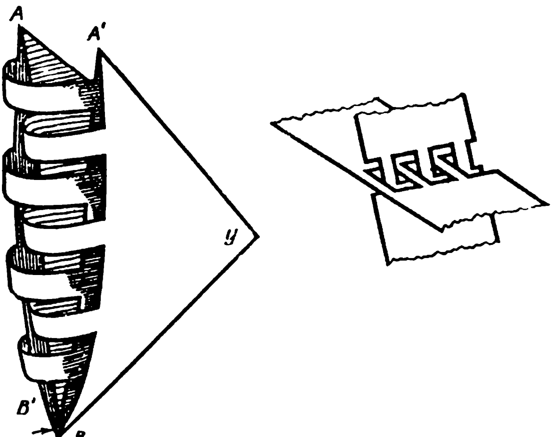
شکل ۱۰۳

صفحهٔ تصویری

درحالت بطری کلین، درآغازکار، مسالهٔ برخورد استوانهٔ خم‌شده باخودش، ما را به‌زحمت انداخت، زیرا، رابطهٔ روشن بخش‌ها، چنین امکانی رابه‌مانمی‌داد. درحالت صفحهٔ‌تصویری، این برخوردباخود خصلتی کاملاً جدی‌تر داردوبه‌هریک ازدوجفت کناره، مربوط‌می‌شود: این‌وضع، به‌این‌مناسبت‌پیش‌می‌آید که، هردوجفت کناره، قبل‌ازاتصال به‌هم، باید به اندازهٔ نیم دور پیچانده شود. برای ساختن مدل کاغذی آن (ویا مدلی شبیه‌آن)، بایدنیروی زیادی صرف کرد؛ بعدازساختن مدل هم نمی‌توانیم آن را، مثل حالت نوار مربعی موبیوس، باز کنیم. تنها چیزی که‌برای‌ما باقی می‌ماند، این‌است که پیروزمندانه فریادبزنیم: «همین که هست».

این مدل، تقریباً شبیه نوارمربعی موبیوس ساخته می‌شود. ولی اکنون،نه‌تنهاباید AB را به A′B′ بچسبانیم،بدون این که به‌تقسیم آن‌ها به‌وسیلهٔ کناره اهمیتی بدهیم، ضمناً آخرین‌اتصال راهم (بعدازدوچین) انجام دهیم، بدون این که توجه کنیم که، اتصال اول، مانع آن می‌شود.

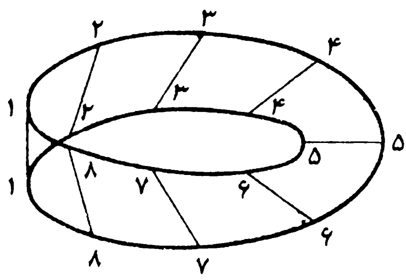
برای انجام این عمل، باید به حیله‌ای متوسل شویم که در شکل ۱۰۴ نشان داده شده است، بخش ساختگی برخورد با خود را درسمت راست شکل مجسم کرده‌ایم. متخصصان توپولوژی، ظاهراً، دربارهٔ قانونی بودن این مدل حرف دارند: نقطهٔ x، که در آن‌جا، برخورد با خود ، وجود دارد ، تاحدی تردید آمیز است و ممکن است کسی را وادارد که، با اظهار شگفتی، ابروهای خود را بالا بیندازد. اگر درصفحهٔ تصویری، سوراخی به‌وجودآوریم (حتی اگر، این‌سوراخ، یک نقطهٔ منحصر باشد)، آن وقت، این صفحه رامی‌توان، به‌نوارموبیوس تغییرشکل داد، درست همان‌طور که‌سطح کرهٔ سوراخ دار رامی‌توان، به‌صورت قطعهٔ مسطح، تغییر شکل داد. ولی، این تغییر شکل، عادی نیست: خط‌های‌قطری، درتمامی سطح وجوددارند و، ضمناً، ازدرون یکدیگرمی گذرند. اگرسوراخ ایجادشده باشد (ولی، هنوزتغییرشکل،



شکل ۱۰۴

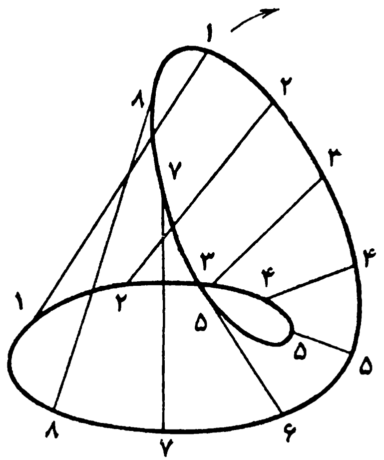
آغاز نشده باشد)، سطحی به دست می‌آید که بــه شب‌کلاه متقاطع (cross – cap) مشهورشده است.

به مفهومی، کروس کپ را می‌توان، با بریدن‌گوشهٔ y ازمــدل (شکل ۱۰۴ را ببینید)، به‌دست‌آورد. ولی بهتراست نوارموبیوسی را پیش‌خودتصور کنیم (ویاآن‌را بسازیم، اگرچه چندان هم ساده نیست) که‌کنارهٔ‌آن، از مفتولی‌کاملاً کلفت تشکیل شده باشد وخودسطح، از نوارهای باریک یــا قیطان‌های کاملاً کش‌دار (مثلاً، ازلاستیک‌های طبی)، درشکل ۱۰۵، این مــدل نشان داده شده و، در آن، دو انتهای هرقیطان لاستیکی، با یک عدد مشخص شده است. اکنون مفتول را، آن طور که درشکل ۱۰۶ دیــده می‌شود، بازمی‌کنیم، ضمناً، قیطان‌ها



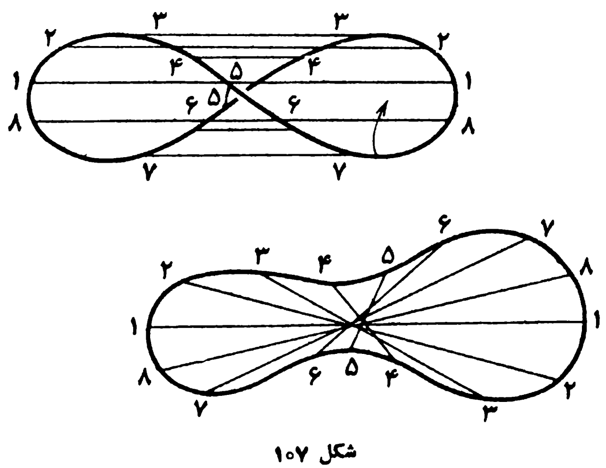
شکل ۱۰۵

کشیده می‌شوند و، یاهمان طور که درشکل ۱۰۷ دیده می‌شود، ضمن نزدیک شدن شکل مفتول به دایره، نوارها آغاز به برخوردبایکدیگر می‌کنند. اگرفرض کنیم که مفتول به صورت دایره درآمده است، آن وقت، هریک از قیطان‌ها درامتداد قطر دایره قرارمی‌گیرند. بنابراین، طول نوارقیطان‌ها با هم برابر می‌شوند و، اگر پیش خود تصور کنیم که تمامی‌سطح دایره را پوشانده‌اند، وانتهای آن‌ها، بدون برخورد، به



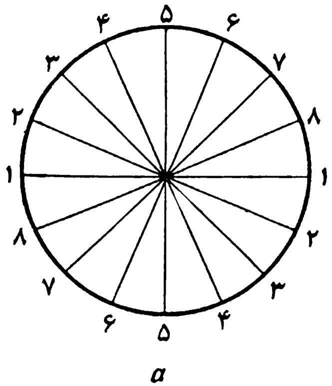
شکل ۱۰۶

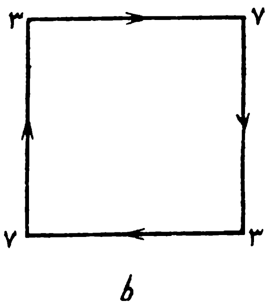
دیگر قیطان‌ها وصل‌شده است (به‌نحوی که سطح اصلی را تشکیل‌داده باشند)، آن وقت یک صفحهٔ دایره‌ای لاستیکی به‌دست می‌آید که، در کنارهٔ آن، یک مفتول قرار دارد (شکل ۱۰۸ — a). در آن، مثل گره نخستین سوراخی وجود ندارد، ولی، مثل سابق، یک کناره و یک رویه



شکل ۱۰۷

دارد. موقعیت اخیر به این‌جا مربوط می‌شود که، اگر جهت را در روی کنارهٔ جدید تعقیب کنیم، برایمان روشن می‌شود که، عددها به چنان ردیفی قرار گرفته‌اند که، هردو کمان روبه رو، را می‌توان با یک نیم‌دور دوران به یکدیگر تبدیل کرد و از این‌جا نتیجه می‌شود که، دورویهٔ سطح، به‌هم مربوط‌اند. اکنون، دایره را به‌مربع تغییر شکل می‌دهیم





شکل ۱۰۸

(شکل ۱۰۸ — b): عددهای روی محیط مربع روشن می‌کنند که اتصال کناره‌های آن را، می‌توان طبق قاعدهٔ اتصال صفحهٔ تصویری تحقق بخشید. آن چه برای ما باقی مانده، این است که، شبیه پنچر گیری تویی اتومبیل، این مربع را، به سطح سوراخ دار کره‌ای اضافه کنیم، به‌این ترتیب، صفحه‌ای تصویری، که تا حدی تغییر شکل یافته است، به‌دست می‌آوریم (این، در واقع، عبارت است از سطح کره‌ای با یك کروس کپ).

آن چه تا این‌جا گفتیم، به‌اندازه کافی مبهم و به سختی قابل‌درك است؛ ولی در پایین مثالی از کاربرد مدل می‌دهیم و به کمك آن، هم شکل

سطح را تجزیه وتحلیل وهم وجود آنرا ثابت می کنیم.

تقارن

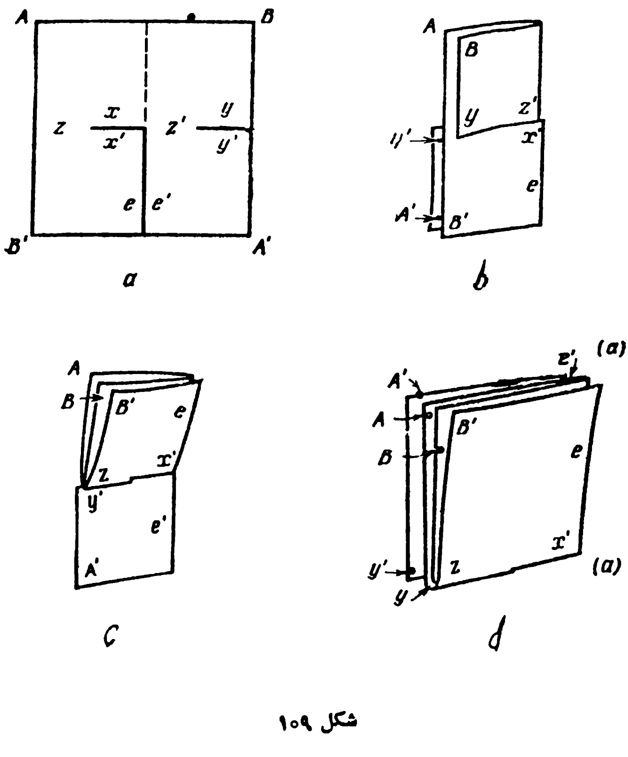
دراین‌جا، ضمن استفاده ازنوار موبیوس، به‌جای واژهٔ «دوران نیم‌دور»، برای سادگی‌کار، به‌طور ساده، از «دوران» صحبت خواهیم کرد که به‌معنای آن است که، نوار را یك‌بار پیچانده‌ایم.

ضمن ساختن مدل ، اگر بخواهیم در چـارچوب توپولوژی نظری ـ مجموعه‌ای باقی‌بمانیم، به‌سختی می‌توانیم به‌بعضی‌پرسش‌ها، پاسخ دهیم. این‌پرسش‌ها ، در آن‌جا ، حتی نمی‌توانند به‌وجود آیند. مثلاً ، می‌دانیم که نوار موبیوس‌متناظر بایك‌دوران‌است؛ به‌چه‌مناسبت، وقتی آن‌را در طول خط میانه می‌بریم ، به‌گرهی می‌رسیم کـه تعداد دوران‌های آن برابر است با ۴؟ به‌همین‌ترتیب ، شگفتی‌آور است‌که استوانه و چنبره متقارن‌اند، در حالی‌که نوار موبیوس نامتقارن‌است، زیرا می‌تواند ، هم راست‌پیچ و هم‌چپ‌پیچ بـاشد . البته ، استوانه و چنبره هم می‌توانند نـامتقارن باشند، ولی در صورت لزوم، می‌توان آن‌ها را به‌صورت متقارن درآورد ، در حالی‌که برای نوار موبیوس (ویا، دست‌کم ، برای مدل‌آن)، این امکان وجود ندارد . بطری‌کلین را می‌توانیم‌طوری برش‌دهیم که یك‌نوار موبیوس‌به‌دست آید؛ ضمناً، بسته به‌این که‌کدام رویهٔ گلو یا محل برخورد بـا خود را برش دهیم، ممکن است راست‌پیچ یـا چپ‌پیچ بـاشد . ببینیم ، در مورد صفحهٔ تصویری، وضع چگونه است ؟

مـارتین‌گاردنر ، مدل کاغذی نه‌چندان بزرگی، برای نویسندهٔ این کتاب فرستاده بود و توضیح داده بود که این، یك‌صفحهٔ تصویری

است. این‌مدل، ساده به‌نظر می‌آمد، به‌راحتی قابل ساختن بود و مثل قارچ، معصوم می‌نمود. آن‌را در شکل ۱۰۹ نشان داده‌ایم وازخواننده می‌خواهیم، هم این‌مدل وهم مدل‌های بعدی‌را، خودش بسازد.

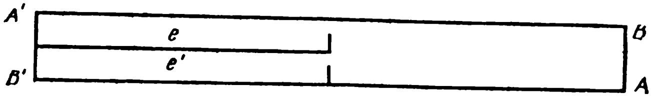
روی مربع کاغذی (شکل ۱۰۹–a)، دوبرش ee' - xx' و yy' را به‌وجود می‌آوریم. درشکل ۱۰۹–b، نیمهٔ‌راست BA' را،به‌سمت چپ و در طول خطچین تا کرده‌ایم ، به‌نحوی کـه B روی A و A' زیر B' قرار گیرد. برای این منظور باید شکاف yy' را در xx' داخل کرد . در شکل ۱۰۹ – c ، بخش‌پائینی B' به‌طرف تا شده و روی B



شکل ۱۰۹

قرار گرفته است ، و در شکل ۱۰۹ - d ، بخش A' به‌طرف بالا و پشت A تا شده است. اکنون، کناره‌های چپ و بالای بخش‌های A و A' را به‌هم می‌چسبانیم ؛ همین عمل را دربارهٔ B و B' هم انجام می‌دهیم، و کناره‌های بخش قائم برش ee' را دوباره به‌هم وصل می‌کنیم. فرض‌را براین می‌گیریم که ، کناره‌های چسبیده نشدهٔ xx' و yy'، بخش‌های بریده‌نشدهٔ z و z' را قطع می‌کنند و، درواقع هم، ممکن است بخشی از آن‌ها ، با هم یکی شود (آن‌طور که در شکل ۱۰۴ نشان داده شده است).

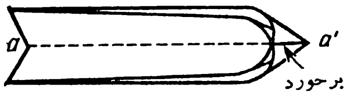
مطالعهٔ شکل حاصل، نشان می‌دهد که هر دو کنارهٔ روبه روی مربع (درشکل ۱۰۹ - a)، بعد از یك پیچ به‌هم وصل شده‌اند وبرش ee' هم از بین رفته است . به‌این ترتیب ، اگر شبیه مدل بطری کلین، از برخورد سطح با خودش چشم‌پوشی کنیم، آن‌وقت، مدلی از یك صفحهٔ تصویری، در اختیار خواهیم داشت. ظاهراً ، همه‌چیز روبه‌راه است؛ تنها کنارهٔ BA' ، نیمی درجلوونیمی درعقب کنارهٔ AB' واقع است. آیا این‌نقص‌را بپذیریم؟ اجازه بدهید، به‌سراغ آزمایش‌برویم.



شکل ۱۱۰

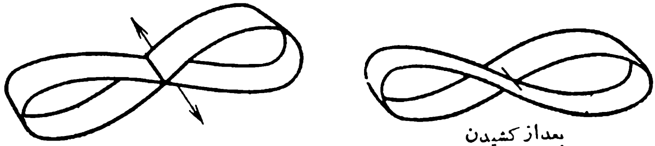
تنها دو کنارهٔ بالا و پایین AB و $A'B'$ را به‌هم می‌چسبانیم. برای این‌که مطلب بهتر روشن شود ، از یك مستطیل باریك استفاده می‌کنیم که به‌پهلو خوابیده باشد؛ بریدگی‌ها و ضلع‌ها را، در این مستطیل ، با همان حرف‌هایی نام‌گذاری می‌کنیم که در مربع وجود

داشت (شکل ۱۱۰). اگر AB را به A'B' بچسبانیم، به‌حق انتظار داریم که یك‌نوار موبیوس به‌دست آید ، ولی وقتی که آن‌را باز کنیم ،



شکل ۱۱۱

به‌چیزی غیرعادی برخورد می کنیم (ماالبته به‌خاطر داریم که کناره‌های ee' به‌هم چسبیده‌اند) به‌شکل ۱۱۱ نگاه کنید. آیا ممکن است ، نوار

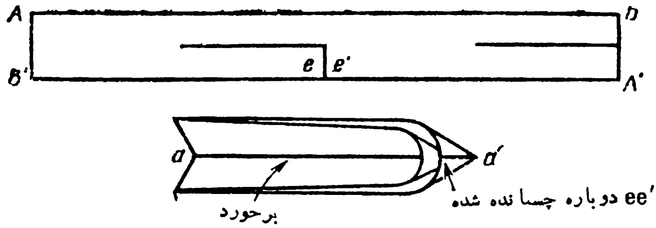


شکل ۱۱۲

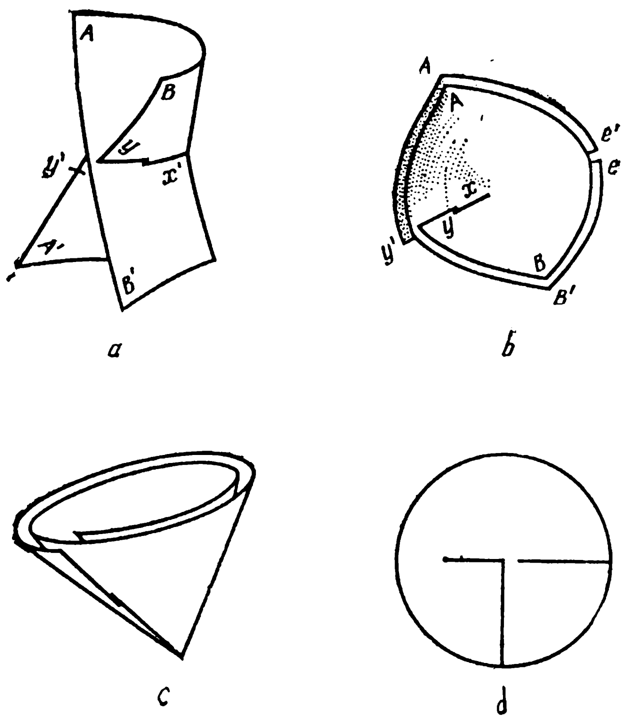
موبیوس خود را زیر آن پنهان کرده و ، در واقع، با سطحی‌سروکار داریم که همسان نوار موبیوس است؟

شکل را درطول محور مرکزی aa' می‌بریم (هم عرض دراز شدۀ aa') در شکل (۱۰۹ ـ d)؛ باید به‌گرهی‌برسیم که دارای دو رویه دو کناره وچهار دوران باشد. به‌جای آن، مدلی‌را به دست می آوریم کـه در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است. اگر بخش‌های این‌شکل‌را به دو طرف بکشیم (قطعه را از برخـورد با خود آزاد کنیم)، معلوم می‌شود که‌تنهادو دوران‌دارد. در این‌جا، باید جریانی وجودداشته‌باشد.

آزمایش‌راتکرار می کنیم، منتهی‌این‌بار،دو کنارۀ دیگر AB' و BA' را به‌هم وصل می کنیم ؛ بازهم از همان مستطیل باریك استفاده می کنیم کـه ، این‌دفعه ، ضلـع کنار به‌مراتب کوچکتر از قاعده است



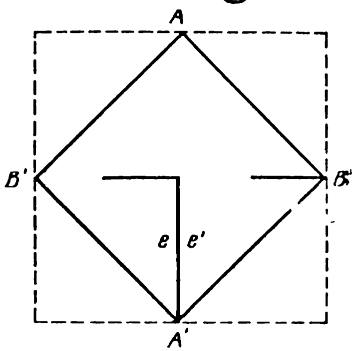
شکل ۱۱۳



شکل ۱۱۴

(شکل۱۱۳). برش ′ee را می‌چسبانیم وشکل‌را درطول ′aa می‌بریم، گرهی بدون پیچ، یعنی استوانه به‌دست می‌آید. چه پیش‌آمده است؟ فرض کنید، از برخورد باخودآزاد شده‌باشیم، به‌چه مناسبت، پیچ آن ناپدید شد؟

اجازه بدهید به‌مربع گاردنر برگردیم (شکل ۱۱۴ را ببینید). وقتی‌که شکاف ′yy را در ′xx داخل می‌کنیم (شکل ۱۱۴ ـ a) ، کاغذ را تا نمی‌کنیم. سپس، ′A را به‌بالاپشت A و ′B را به بالادر جلو Bمی‌بریم(بدون‌این‌که ′ee را وصل کنیم) واز بالانگاه می‌کنیم (شکل ۱۱۴ـb)، یك مخروط دوگانه می‌بینیم. در شکل ۱۱۴ـc، گوشه‌های ′AA و ′BB را بریده‌ایم ومخروطی باکنارهٔ صاف به‌دست‌آورده‌ایم. این‌شکل،باشکلی‌که در۱۰۹ـdداشته‌ایم، همسان‌است. اگر آن‌رادوباره بازکنیم،یك دایره به‌دست می‌آید(شکل۱۱۴ـd). این مطلب ، تغییری راکه می‌توان درمربع اصلی به‌وجودآورد، به مانشان می‌دهد (درشکل ۱۱۵، خطچین‌ها،کنارهٔ مربع‌اصلی را به‌مانشان می‌دهند). وقتی آن‌را

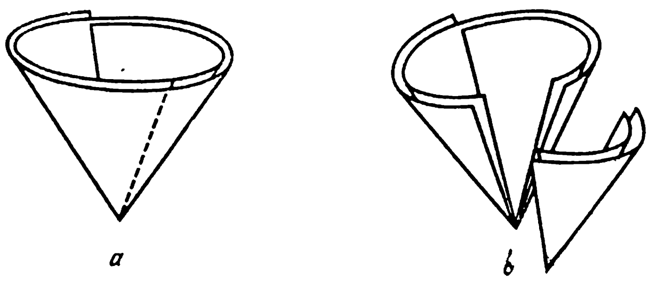


شکل ۱۱۵

جمع کنیم، مثل قبل، به‌موقعیت تازه‌ای از کناره‌ها می‌رسیم، زیرا ، حالا دیگر کناره‌ای وجود ندارد که نیمی از آن درجلو و نیمی‌درعقب

کنارهٔ دیگر باشد . وقتی که همان تجربهٔ قبل را انجام می‌دهیم و تنها یک زوج از کناره‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می کنیم ، به‌نتیجه‌ای می‌رسیم که، تا حدی، با نتیجهٔ قبلی متفاوت است. ما به‌این‌خاطر از مدل مربعی استفاده می کنیم که، در نمونهٔ مدل‌های دراز ، درحالت برش‌های جدید قطری به نتیجهٔ خوبی نمی‌رسیم . این‌بار ، در هردو حالت،گرهی بادودوران به‌دست می آید و از استوانه‌ها، خبری نیست.

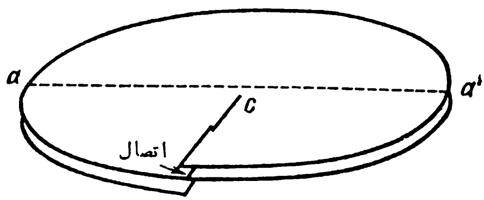
در حالت مدل‌های مربعی ، به‌سختی می‌توانیم از کار خود سردرآوریم ، ولی اگر مدادی در دست بگیریم و آن‌را ، به‌آرامی ، روی مدل هدایت کنیم ، می‌توانیم تعداد دوران‌ها را محاسبه‌کنیم. از آن‌جا که ، در این‌جا ، برشی در طول خط برخورد با خود انجام نمی‌دهیم، تعجبی نداردکه چرا، مثل قبل،استوانه‌ای به‌دست نمی آید؛ وبه‌چه مناسبت، به‌جای ۴ دوران، به۲ دوران می‌رسیم؟ اجازه بدهید، دوباره به‌آزمایش بپردازیم.



شکل ۱۱۶

درحالتی که روی شکل ۱۱۴ــe نشان داده شده است، اختلاف بین اتصال این یا آن زوج کناره را، با بریدن‌گوشه‌ها، از بین‌برده‌ایم.

در صفحهٔ تصویری ایده‌آل، شبیه کروس کپ ، گوشه‌ای وجود ندارد (در نمونه‌ای از کروس کپ که از بـاز کردن نوار موبیوس به‌دست آوردیم، گوشه‌ای وجـود نداشت ، اگـرچه چنین گـوشه‌هایی هم وجود داشته‌باشند ، سطح متناظر آن ، با هم یك کروس کپ است). نمونه‌های ایده‌آل همهٔ این شکل‌ها (حتی ، اگر تعجب نکنید ، نوار موبیوس)، به‌طورکامل متقارن‌اند. مخروط بـا کنارهٔ صاف را که در شکل ۱۱۴-c دیده می‌شود، در نظر می‌گیریم و، با اضافه کردن کاغذ، آن‌را به‌صورت مسطح درمی‌آوریم . هردو لایه را در طول خط‌چین می‌بریم (شکل ۱۱۶-a)، مخروط را باز می‌کنیم وقطعه‌هایی به‌شکل v به آن اضافه می‌کنیم (شکل ۱۱۶-b). اگر این قطعه‌هـا به‌اندازهٔ کافی عریض باشند ، مخروط ، از نظر توپولوژی تغییر نمی‌کند و به‌یك صفحهٔ دایره‌ای تبدیل می‌شود . دو لایه به‌دست می‌آید که ، در امتداد مرکز تاکناره، با خودش برخورد کرده است (شکل ۱۱۷)[1]. این‌مدل



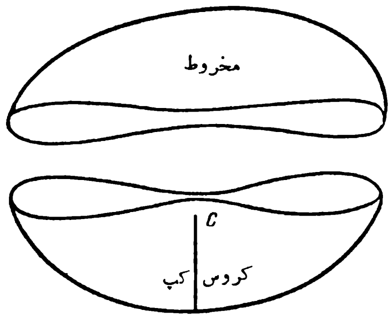
شکل ۱۱۷

را می‌توان، ساده‌تر، به‌این‌صورت درست کرد که از دوصفحهٔ دایره‌ای

---

۱. یادآوری این‌مطلب بی‌مناسبت نیست‌که، دانش توپولوژی ، با مطالعهٔ همین سطح‌هایی که با خود برخورددارند ، آغازشد (این‌سطح‌هارا؛سطح‌های ریمانی می‌نامند و حوزه‌های طبیعی تابع‌هـای بامتغیر مختلط به حساب می‌آیند). (ویراستار ترجمهٔ روسی).

آغاز کنیم، هر کدام از آن‌ها را، روی شعاع ببریم و ، بعد، آن‌ها را به‌هم بچسبانیم. برای این که این‌مدل‌را به‌صفحهٔ تصویری تبدیل کنیم، باید کنارهٔ گرد صفحهٔ دایره‌ای بالا را به‌همان کناره از صفحهٔ دایره‌ای پایین بچسبانیم. اکنون، اگر شکل را در طول خط‌راست aa′ ، از پشت مرکز c (انتهای برخورد با خود) ببریم ، دو بخش به‌دست می‌آید که در شکل ۱۱۸ نشان‌داده شده است (کناره‌های بیرونی، در روی شکل، باانحنا نشان داده شده است که عینی‌تر باشد). نیمهٔ پایینی،

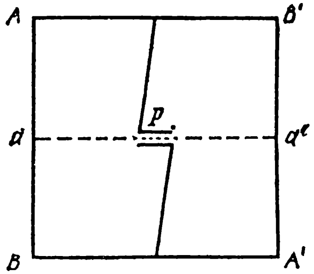


شکل ۱۱۸

یك کروس کپ و، نیمهٔ بالایی، از لحاظ توپولوژی، باصفحهٔ‌دایره‌ای، هم‌ارز است . ولی می‌دانیم که ؛ اگر کروس کپ را به‌سوراخ سطح‌کره‌ای اضافه کنیم، یك‌سطح‌تصویری به‌دست می‌آید؛ وصفحهٔ‌دایره‌ای ما، از نظر توپولوژی، باسطح کرهٔ سوراخ‌دار هم‌ارز است ؛ به‌همین مناسبت، شکل مفروض، قبل ازبرش aa′ ، عبارت است ازیك سطح تصویری.

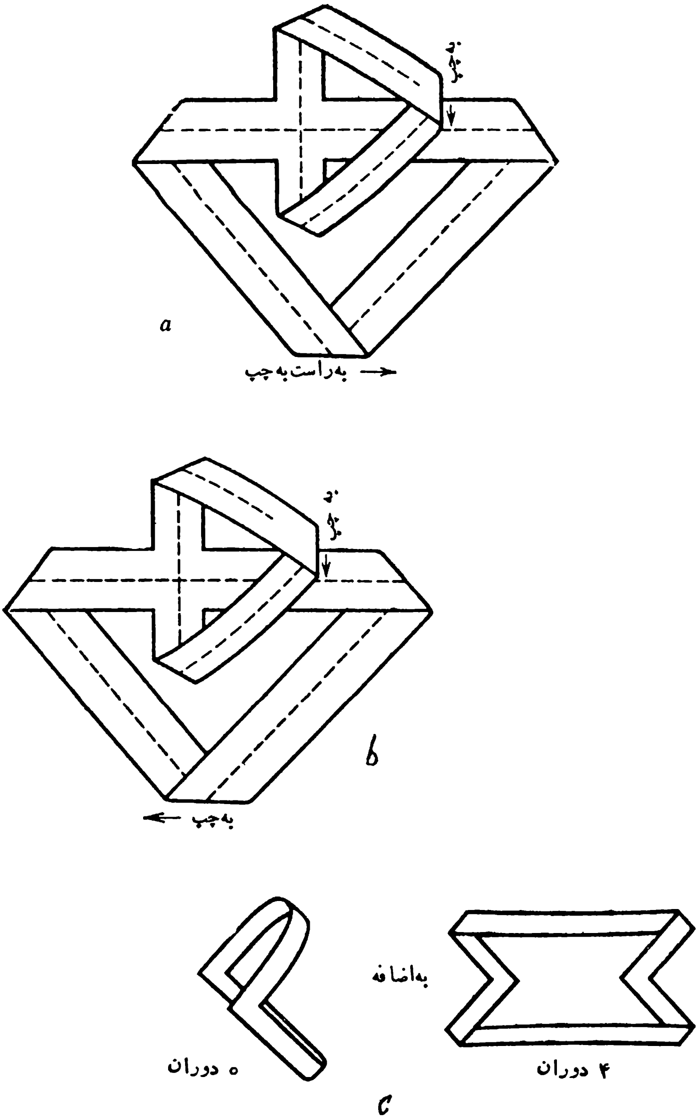
تفاوت در این‌جاست که ، کروس کپ قبلی (شکل‌های ۱۰۷ و ۱۰۸)، مسطح ویك لایه بود وبرخوردباخود، در آن، درمرکزمتمرکز شده بود (در واقع ، این‌مدل را نمی‌توانیم بسازیم). آن‌مدل ، نسبت

به‌یك‌مرکز، متقارن بود؛ ولی این‌حقیقت‌که مدل جدید، دارای چنین تقارنی نیست، آن‌را بدتر ازمدل بطری‌کلین نمی‌کند: در واقع ، تمام توجه ما ، به‌این‌جا مربوط می‌شود‌که بتوانیم بهترین‌صورت برخورد با خود را بسازیم . هم مدل بطری‌کلین و هم مدل جدید ما ، نسبت به‌خط‌هایی‌که روی آن‌ها رسم شوند، ویااگر صحبت ازفضای سه‌بعدی باشد، نسبت به‌یك‌صفحه، متقارن‌اند، ولی نوارموبیوس، چنین تقارنی ندارد. اجازه‌بدهیدبه‌مدلی‌توجه‌کنیم،‌که‌برخورد باخود، در آن‌ناقص باشد، یا اصولا چنین برخورد باخودی وجود نداشته‌باشد.



شکل ۱۱۹

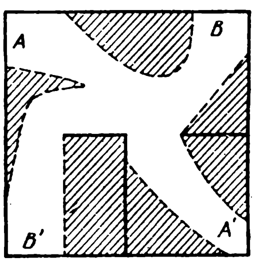
درشکل ۶۴،مدل‌های ناقصی از بطری‌کلین و صفحهٔ تصویری، به‌کمك صلیب‌های کاغذی ، درست‌کردیم؛ به‌این دلیل آن‌ها را ناقص می‌گوییم‌که درمدل‌های واقعی ، باید تمامی لبه‌های هردو جفت کناره، به‌هم چسبیده باشند.به‌همان‌ترتیب، می‌توانیم نوار مربعی موبیوس را، باایجادشکاف دردوطرف مربع،بچسبانیم (شکل۱۱۹). آنرا می‌توان، به‌سادگی، نسبت به‌بخش بریده نشده و باریك P ، پیچ‌داد؛ ولی خود برش‌ها، بخشی از کناره‌های نواررا تشکیل می‌دهند، بنابراین، شکل، نه‌منظم است ونه‌مربعی.آیا برش ee' درمدل گاردنر ، با آن خویشاوند است؟ گمان نمی‌رود، زیرا در آن‌جا،این‌شکاف دوباره به‌هم می‌چسبد،



شکل ۱۲٥

درحالی که بریدگی‌های شکل ۱۱۹، حتی بعداز اتصال AB و A′B′، باقی‌می‌مانند. باوجود این،وقتی که شکل ۱۱۹ را درطول aa′ ببریم، حلقه‌ای باچهار دوران می‌دهد.

حالا، برش‌های محوری درمدل صلیبی‌شکل‌را، که دربارهٔ آن در فصل چهارم گفت‌وگو کردیم (شکل ۶۴)، دوباره در این‌جا نمایش می‌دهیم، منتهی دراین‌جا به صورت تخت‌شدهٔ مدل سروکار داریم، تا بعد ازپیچ‌ها، ساده‌تر بتوانیم آن‌را دنبال کنیم. (این‌پیچ‌ها، روی شکل ۱۲۰، به‌تا، تبدیل‌شده‌اند). هردومدل، معرف صفحهٔ تصویری هستند، تنها درشکل ۱۲۰–a، مدل را به‌این‌معنا می‌توان متقارن دانست که،یك جفت انتها باپیچ به‌چپ به‌هم‌چسبیده‌اند وجفت‌دیگر، باپیچ به‌راست. درشکل ۱۲۰–b، هردوجفت انتها، دریك‌جهت پیچ‌خورده‌اند:به‌طرف چپ. وقتی که مدل اول را درطـول خط‌چین ببریم ، دو حلقهٔ متصل به‌هم به‌دست می‌آید. یکی ازآن‌هـا ، دارای دو دوران «چپ‌پیچ» و ودیگری دارای دودوران «راست‌پیچ» است. توجه کنید، دو دوران و نه چهاردوران.



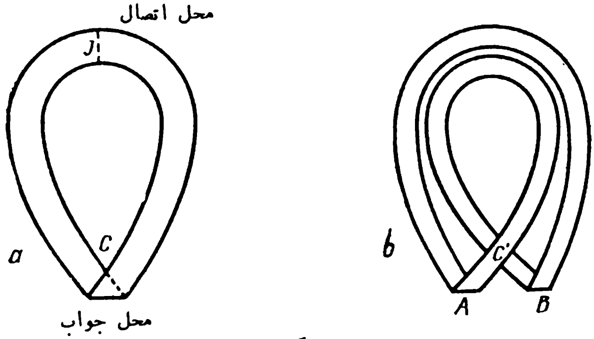
شکل ۱۲۱

وقتی که برش‌محوری‌را در مدل‌دوم انجام‌دهیم (شکل۱۲۰–b)،

دوحلقه به‌دست می‌آید که متصل به‌هم نیستند: یکی از آن‌ها با چهار دوران و دیگری بدون دوران، یعنی یك استوانه (شکل ۱۲۰ - c).

این رشته آزمایش‌ها، تبدیل‌هایی از مدل گاردنر را به‌خاطر می‌آورد که به‌تقارن آن‌ها مربوط بودند. اگر مربع اولیهٔ مدل گاردنر را انتخاب کنیم وبخشی از کاغذ را چنان درآوریم که یك‌صلیب تغییرشکل یافته به‌دست آید (شکل ۱۲۱)، روشن می‌شود که، دوجفت کناره‌ها، به‌طریقه‌های مختلفی به‌هم پیوند داده می‌شود: پیچ به‌راست وبه‌چپ (قبل از آن که صلیب را ازمربع ببریم، عاقلانه است که، تاهای مربوط‌را انجام دهیم). احتمالا، خواننده‌ای که این‌فصل را می‌خواند، بخواهد آزمایشی به‌این ترتیب انجام دهد که، هردو کنارهٔ مجاور، و نه روبه‌رورا، درمدل‌صلیبی‌شکل، بعد ازپیچ‌هایی در دو جهت‌مختلف، به‌هم بچسباند و، بعد، برش را انجام‌دهد: در بعضی حالت‌ها، به‌نتیجه‌های کاملا عجیب وغریبی می‌رسیم. از خواننده می‌خواهیم، خودش به‌این آزمایش‌ها بپردازد.

هنوز این‌مطلب را روشن نکرده‌ایم که، چرا دربعضی از این مدل‌ها، بعد ازبرش، به‌دو دوران می‌رسیم، درحالی که نوار موبیوس،

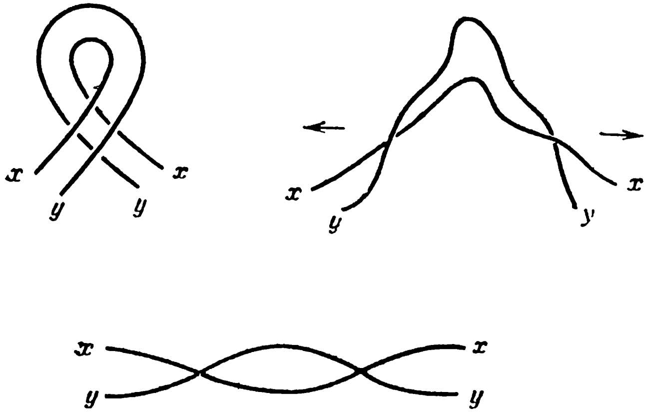


شکل ۱۲۲

چهـار دوران می‌دهد. مگر نه این‌است که همهٔ آن‌ها ، قبل از برش، دارای یك‌دوران هستند. اجـازه بدهید ، نوار موبیوس تخت‌شده را بسازیم (شکل ۱۲۲) . در این‌جا، یك‌برخورد کناره بـا خودش ، در نقطهٔ C وجود دارد که، از آن، نه به‌کمك تغییرشکل و نه حتی به‌کمك بریدگی به‌دنبال اتصال‌ها(که از لحاظ همسانی مجاز باشد)،نمی‌توان نجات یافت (قبلاً هم گفته‌ایم که ، درتبدیل همسانی، به‌شرطی می‌توان بریدگی ایجاد کرد که ، در پایان‌کار، بتوانیم آن‌چه راکه به‌هم وصل بوده‌است، دوبار بادقت به‌هم وصل کنیم). بنابراین، ازنوار راست‌پیچ موبیوس، می‌توان نوار چپ‌پیچ را برید وچسباند (تعداد دوران‌ها ، ممکن است بیش ازیکی باشد؛ تنها لازم است، تعدادآن‌ها فردباشد).

اگر شکل را درطول محورآن ببریم (شکل ۱۲۲ ـ a) وآن را بازکنیم (شکل ۱۲۲ ـ b)، متوجه می‌شویم کـه پیچ نخستین، درنقطهٔ A و B ظاهر می‌شود وبـه حلقهٔ جدید دو دوران می‌دهد؛ بـه‌جزآن، برخورد با خود ایـن حلقه در نقطهٔ C'، متناظر C، پدیـد می‌آید. این قطعهٔ جدید برخورد با خود، یعنی C' را بـررسی می‌کنیم. در شکل ۱۲۳،آن را بـه‌صورت بزرگـ شده‌ای، بـاکناره‌های x و y، نشان داده‌ایم. آن را، درجهت‌هایی کـه با پیکان‌هـا نشان داده شـده است، می‌کشیم، تاکشف کنیم که دو دوران به‌دست‌آورده‌ایم که با دو دوران اولیه، روی هم، تشکیل چهار دوران می‌دهند این فکر به‌وجود می‌آید که، یك دوران اولیه،که پاسخ‌گوی نـوار موبیوس است،کاملاً تنها نیست: در ردیف آن، دوران دیگری هـم وجـود دارد ودر محلی‌که کناره‌ها با خود برخورد کرده‌اند، پنهان شده است (وقتی‌که، به‌طریق جدیدی، دوکنارهٔ نـوار پیچ نخورده و متصل نشدهٔ اولیـه را، به هم

مربوط کردیم). ظاهراً، ایـن دوران پنهان، به حـرکت فیزیکی پیچ، ارتباطی ندارد.



شکل ۱۲۳

اگر چند تکه نوار کاغذ برداریم و آن‌ها را چند بار (و برای هر تکه، به‌تعداد مختلف) بپیچانیم، سپس بچسبانیم، ودرطول محورببریم وتعداد دوران‌ها را بشماریم، به‌جدول زیر می‌رسیم:

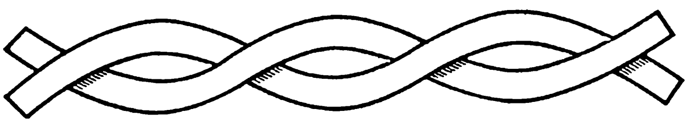
قبل از برش	بعد از برش
۱	۴
۲	۴
۳	۸
۴	۸
۵	۱۲
۶	۱۲
۷	۱۶
۸	۱۶
۹	۲۰
۱۰	۲۰،... و غیره.

توجه‌کنید: اگر تعداد دوران‌های قبل از برش، فرد وبزرگتر از واحد باشد، در حلقه‌ای که درنتیجهٔ برش به‌دست می آید، هرچه تعداد دوران‌ها بیشتر باشد، گره‌های بغرنج‌تری حاصل می‌شود. اهمیت این حقیقت را، درزیر، روشن خواهیم کرد.

در همهٔ موردها، وقتی یك واحد بـه تعداد فرد دوران‌ها اضافه شود، چیزی به تعداد دوران‌ها بعد از برش اضافه نمی‌شود (در حالت اخیر، تعداد دوران‌ها برابراست بامجموع دوران‌ها دردوحلقهٔ حاصل: وقتی که حلقهٔ باتعداد زوج‌دوران را برش دهیم، همیشه دوحلقه‌تشکیل می‌شود). می‌توان انتظار داشت که، وقتی که تعداد پیچ‌ها عددی زوج باشد، تعـداد دوران‌هـای حاصل دو برابر تعداد دوران‌های حلقهٔ اولیه باشد، زیرا ضمن برش چنین حلقه‌ای، دوحلقهٔ تازه تشکیل می‌شود که با حلقهٔ اولیه، متحدند. اضافه شدن یك‌واحد، به تعداد فرد دوران‌ها، با این‌موقعیت جبران می‌شود که، درواقع، بستگی بین کناره‌ها راتغییر می‌دهیم وبه همان وضع نوار اولیهٔ پیچ‌نخورده برمی گردیم. بنابراین، اگر تعداد فرد دوران‌ها را تـا نزدیك‌ترین عـدد زوج، بزرگ کنیم، دوران‌های اضافی بـه‌دست نمی‌آید، ولی اگرتعداد زوج را زیادکنیم وبه نزدیك‌ترین تعداد فرد برسانیم، آن وقت، چهار دوران جدید ظاهر می‌شود.همان‌طورکه این وضع، درحالت نخستین هم، وقتی که حلقهٔ با یك دوران را می‌بریدیم؛ پیش می آمـد؛ تنها دراین جا، وقتی که از یك عدد فرد به‌عدد فرد بعدی می‌رویم، باید دو دوران اضافه‌کنیم.شبیه حالت تعداد فرد؛ اضافه‌کردن تعداد دورانها، به‌حساب افزایش واقعی پیچ‌های جدید (که بـه‌کمك برش دوبرابر می‌شود) به‌دست می‌آید. همهٔ این‌ها، از نظر عینی، کم وبیش مبهم است، ولی از نظر منطقی،

هیچ ایرادی به آن‌ها نیست. چیزی که برای روشن کردن باقی‌مانده، این است که، چرا در حالت مدل گاردنر، به‌جای چهاردوران، دودوران جدید به‌دست می آید.

به گره‌ها بر می‌گردیم. محاسبهٔ دوران‌ها، در حالتی که تعداد دوران‌ها برابر۳ یا عدد فرد بزرگتری باشد،کار دشواری است؛ بحث زیر، ممکن است کار ما را، دراین مورد، ساده‌تر کند. وقتی که یك نوار را، به‌طورساده، دورنوار دیگری بپیچانیم، به‌هیچ وجه ضرورتی ندارد که هر کدام از نوارها هم، دورخود پیچیده باشند. درشکل۱۲۴، دونوارکاغذی نشان داده شده است که مثل «مار» بریده شده‌اند: آن‌ها، به‌هم پیچیده‌اند، ولی هیچ کدام از آن‌ها، دور خودش، پیچ نخورده است. شکل ۱۲۵ ـ a نشان می‌دهد که، چیزی ازهمین نوع را، با یك



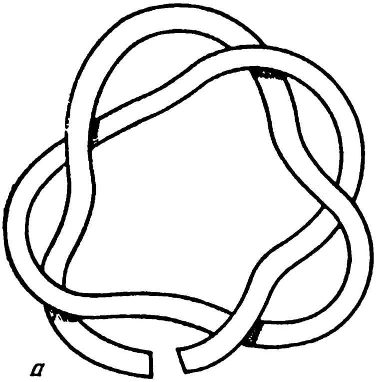
شکل ۱۲۴

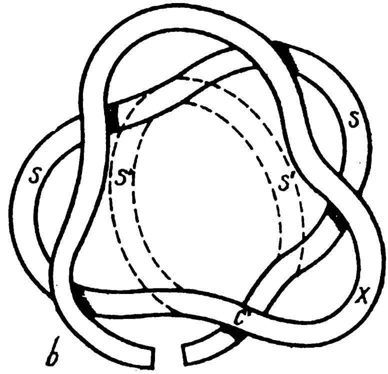
نوار هم می‌توان ساخت. برای این که این مدل مسطح را بسازیم، باید دوقطعه‌کاغذ به‌هم چسبیده انتخاب کنیم. در نظر اول، گمان‌می‌رود که نوار پیچ نخورده است، ولی ظاهر امر، فریب دهنده است. شکل ۱۲۵ ـ b، که شباهت آن باشکل ۱۲۳روشن است که، باوجودموج ما، در C برخورد باخود دارد. اگر در موردآن، همان عمل باز کردن را (که دربارهٔ شکل۱۲۳ انجام دادیم)، دنبال کنیم، درنتیجهٔکار، دودوران به‌وجود می آید.

همهٔ گره‌هایی که،به‌کمك تعدادا فردی دوران تشکیل می‌شوند،

به‌همین شکل‌اند: بدون توجه بـه‌این که، نوار چندبار به‌دور خودش پیچیده باشد، همیشه دو، وتنها دو دور تشکیل می‌دهد. بنابراین،برای محاسبه، می‌توانیم یك قطعهٔ‌کوچك نـوار را با پونـز محکم‌کنیم وبا حرکت ازیك انتها به‌انتهای دیگرنوار (از پونز و، برعکس، به‌طرف آن)، همهٔ انحناهای نوار را دنبال کنیم و، بـا دقت، محاسبه‌کنیم که، نوار چندبار از رویهٔ دیگر به طرف بالا برگشته است (هیچ لزومی نداردکه ببینم، این نوار، چندباربه‌خودش پیچیده است؛ دراین مورد، در پایان کار، عدد ۲ را اضافه می‌کنیم)، یعنی تعداد دوران‌ها را معین می‌کنیم. در حالتی‌کـه درشکل ۱۲۲ ـ b نشان داده شده است، تعداد این پیچ‌ها، برابراست با ۲، زیرا نوارمتناظر آن،که قبل ازبرش آن را بازکردیم، ۲ دور تشکیل می‌داد.

اجازه بدهید، یکبار دیگر، شکل ۱۱۱ را مـورد مطالعـه قرار دهیم: در آن‌جا یك رویه و یك‌کناره وجود دارد و پیچ روشنی درآن دیده نمی‌شود. وقتی که‌آن را، روی محور ببریم، حلقه‌ای با دودوران به وجودمی‌آید (اگر روی یك رویه بازکنیم، با پیچ چپ، واگرروی رویهٔ دیگر بازکنیم، با پیچ راست). اکنون می‌توانیم متوجه شویم‌که این، درواقع، یك نوار موبیوس است،که دراثر رابطهٔ جدید و سادهٔ کناره‌ها به‌وجودآمده‌اند: هیچ‌کار دیگری انجام نداده‌ایم کـه موجب افزایش تعداد دوران‌ها بشود. اکنون، موقع آن فرا رسیده است تا از بعضی چیزها، سردر آوریم. روی شکل ۱۲۶ ـ a، نـوع دیگری از همین شکل داده شده است و می‌تواند نشان دهدکـه، در این جا، دو دوری،که حالت‌های قبلی را به‌یاد آورد، وجود ندارد. یکی ازحلقه‌ها را، دروضعی قرار می‌دهیم که درشکل ۱۲۶ ـ b نشان داده شده است،



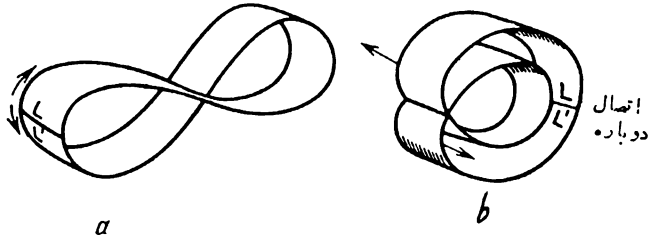


موج‌ها را، که با S نشان داده شده‌اند ، می‌توان در موقعیت S′ S′ قرار داد، ولی اگر X را به داخل بکشیم در همان موقعیت S قرار می‌گیرد.

شکل ۱۲۵

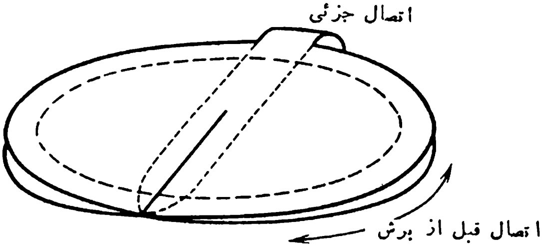
آن وقت، روشن می‌شود که یك دور مضاعف به‌دست می‌آید. چون برخورد با خود را ایده‌آل می‌گیریم، می‌توانیم شکل را در جهت پیکان‌ها و یا در جهت عکس آن‌ها، باز کنیم ویك دوران راست پیچ یا چپ پیچ به‌دست آوریم.

اگر مدل «پاره شدهٔ» شکل ۱۲۱ را انتخاب کنیم و، بعد از آن که تنها قطعه‌های A و A′ را بـه هم چسباندیم، آن را درطول محور ببریم، یك‌نوار موبیوس کلاسیك به‌دست می‌آید که‌درطول محورخود



شکل ۱۲۶

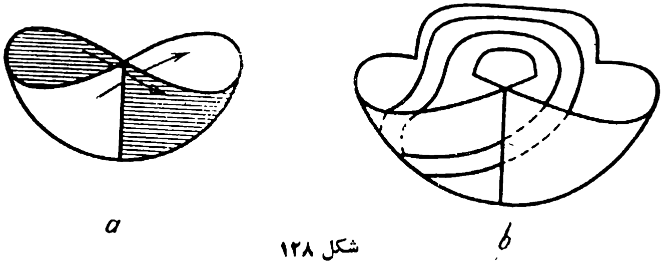
بریده شده است؛ درنتیجه، دو رویه، دوکناره و چهار دوران به‌دست می‌آید. برای محاسبه، می‌توان انتهای متصل‌نشده را جدا کرد. دوران‌ها، راست پیچ هستند، ولی اگر، به جای آن، قطعه‌های B و B′ را به هم بچسبانیم، دوران‌ها، چپ پیچ می‌شوند.



شکل ۱۲۷

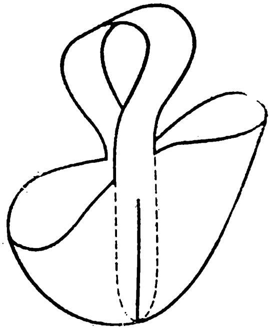
بیائیدوباره، مدل دایره‌ای گاردنر را بررسی کنیم(شکل ۱۲۷). اگر عمل کوچکی دربارهٔ آن، انجام دهیم، معلوم می‌شود که تا چه اندازه‌قابل انعطاف (وحتی دورو وریاکار) است. اگرمدل را درطول نقطه‌چین ببریم (شکل ۱۲۷)، شکلی به‌دست می‌آید که بانوارموبیوس متقارن شکل ۱۱۱، همسان است. نوع دوم، با برش مدل در طول خط‌چین به‌دست می‌آید. در این حالت، مثل حالت قبل، بعد از برش

در طول محور، حلقه‌ای بـا دو دوران به‌دست می‌آید. همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، اگـرمدل گاردنررا ازپهنا، بلافاصله درپشت مرکز C ببریم، یـك صفحهٔ دایره‌ای (یـا مخروط) و یك کروس‌کپ به دست می‌آید. توجه کنید: واژهٔ «بلافاصله درپشت»، خیلی مهم است.



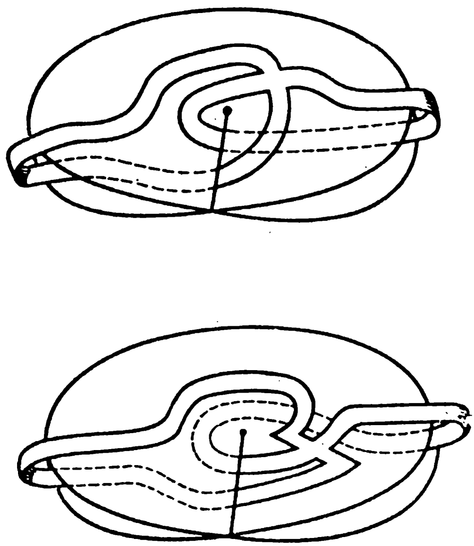
شکل ۱۲۸

این کروس‌کپ، به‌کمك برشی بـه‌دست می‌آید که از نقطهٔ C، انتهای قطعه بـرخورد با خود، می‌گذرد وشبیه تصویری است که در شکل ۱۲۸ ـ a نشان داده شده است؛ دربیشتر کتاب‌ها هم، این سطح را، بـه‌همین صورت نشان می‌دهند. می‌توان توجه کرد که، این سطح، دارای دو رویه است (بخش هاشورخورده وبخش هـاشورنخورده؛ پیکان‌ها نشان می‌دهند که، چگونـه در نزدیکی خـط برخورد با خود، تشکیل شده‌اند)، که درست نیست. از این سطح، به‌کمك برش، باید



شکل ۱۲۹

نوار موبیوس به‌دست‌آید، ولی نمی‌توانیم بـه‌چنین نتیجه‌ای برسیم. اگر، رویه‌ها را اندکی بـه‌طرف بالا ادامـه می‌دهیم، دو رویهٔ سطح، بلافاصله، به‌هم مربوط می‌شوند (شکل ۱۲۸ ـ b): حتی بااین شرط که، برای این ادامه، شکل دلخواهی راکه دراین‌جا می‌بینید، انتخاب کرده باشیم. این اضافه، امکان رسم نـوار موبیوس چپ پیچ را به ما می‌دهد (خط‌درونی)، ضمناً، به‌خوبی دیده می‌شودکه چطور، به‌جای آن، یك نوار راست پیچ حاصل می‌شود. این کروس کـپ، تنها یك رویه دارد و بـا تعریفی تطبیق می‌کندکـه برای صفحهٔ تصویری با یك نقطه سوراخ وجود دارد (درحالت مورد نظر ما، این نقطه، تا صفحهٔ دایره‌ای «بادکرده است»). اگربخشی ازشکل راـکـه درون چپ را به‌بیرون راست و بیرون چپ را به‌درون راست مربوط می‌کندـ تغییر شکل دهیم، آن وقت، می‌توانیم ازایـن سطح، نوار موبیوس متقارنی



شکل ۱۳۰

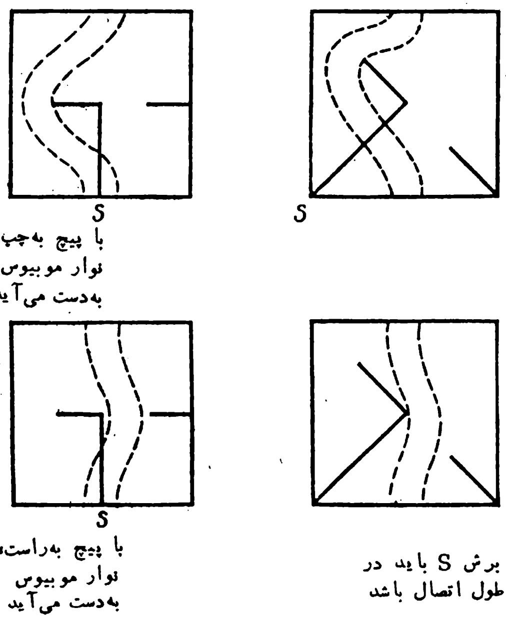
را ببریم (شکل ۱۲۹).

مدل صلیبی شکل صفحهٔ تصویری را (که متقارن است و چه هردوانتها، به‌صورت راست پیچ وچه به‌صورت چپ پیچ به‌هم‌وصل شده باشند) می‌توان ازمدل دایره‌ای گاردنر برید. درشکل ۱۳۰، نتیجهٔ حاصل از اولین و آخرین مدل صلیبی شکل مذکور داده شده است. برای این که نتیجه‌های لازم را به‌دست آوریم، تنها باید بخش‌های بالایی وپایینی کناره‌ها را، درجای لازم، به هم وصل کنیم؛ روشن است که، این مدل‌ها را، از کروس کپ هم می‌توان به‌دست آورد.

تاکید بر این مطلب بی‌فایده نیست که، درمدل گاردنر هم، مثل صفحهٔ تصویری ایده‌آل، نا تقارنی تنها در آن‌جاست که دریك جفت کناره، باپیچ به چپ به‌هم وصل‌شده‌اند وجفت دیگر باپیچ به‌راست: سطح ساخته شده، دارای تاب نیست، اگرچه، برای ساختمان مدل، از آن استفاده شده است. این شبیه آن است که، درمورد مسیر دو در میدان ورزشی که ورزشکاران، درروی آن، درجهت معینی می‌دوند، می‌توان گفت که این مسیر «درجهت حرکت عقربه‌های ساعت است»، با وجود این، برهمین اساس و اگرجهت حرکت را تغییر دهیم، حق داریم بگوییم، مسیر «درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است».

وقتی دربارهٔ شکل ۱۲۱ بحث می‌کردیم، ممکن بود این تصور به وجود آید که، ضمن چسباندن بخش‌های B و B' و به دنبال آن، برش درطول محور، به‌این مناسبت دوران چپ پیچ به‌دست می‌آید که، در مدل اولیه‌هم، این وضع، به‌صورتی «ناقص نشده» وجود داشت. ولی، در واقع، این‌طور نیست: می‌توانیم، همان مدل را، به‌صورت دیگری «ناقص» کنیم، به‌نحوی که در این دو کناره دوران راست پیچ باشد (و

یا این‌طور به‌نظر آید)، که در این صورت، بعد از برش در طول محور، منجر به دوران راست پیچ می‌شد.



شکل ۱۳۱

درشکل ۱۳۱، دو روش «ناقص کردن» مربع و حالت‌های قطری مربع گاردنر را، که همه شبیه هم ساخته شده‌اند، نشان داده‌ایم. این وضع نشان می‌دهد که، چگونه، یك بی‌قاعدگی کوچك و به‌ظاهر غیر-اساسی که ضمن ساختن یك مدل کاغذی «حقیر» (و بــه نظر بعضی ار ریاضی‌دان‌ها، همهٔ مدل‌ها، بــه‌طور کلی «حقیر»انــد) به‌وجود می‌آید، می‌توان به‌درك یکی از عمیق‌ترین مفهوم‌های توپولوژی (و حتی تمامی ریاضیات)، یعنــی مفهوم تقارن، رسیــد. اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم بفهمیم، چرا ریاضی‌دانـان، صفحهٔ تصویری را نه راست پیچ

می‌دانند و نه چپ پیچ و، همچنین، نــوار موبیوس را، بدون تاب به حساب می آورند. چه بسا، با کشفی که، همین چندی پیش، در مورد جهت گیری چپ پیچی دربعضی ازذره‌های مقدماتی انجام شده‌است، بی‌تقارنی جهان، معنای خود را ازدست بدهد و متقارن بودن کامل آن مشخص شود. به‌این مطلب، امید زیادی می‌توان داشت.

۷
رنگ کردن نقشه

بین موفقیت‌های حدی واولیهٔ توپولوژی، قضیه‌هایی وجوددارد که، در آغاز، به عنوان مساله تنظیم و، سپس، اثبات شدند، شهرت بعضی ازآن‌ها، ازجمله قضیهٔ مربوط به‌منحنی ژردان ـ که قبلاً دربارهٔ آن صحبت کرده‌ایم ـ شاید به این مناسبت باشد که، از یك طرف، بی‌اندازه واضح به نظر می‌رسند و، از طرف دیگر، با دشواری قابل اثبات‌اند.

قضیهٔ دیگری ازاین نوع، حکمی است که به‌نام «قضیهٔ تقسیم» مشهور شده است. این قضیه تاکید می کند که، یك سطح (دو بعدی) دلخواه را نمی‌توان به‌حوزه‌ها یا مرزها طوری تقسیم کرد (یا برش داد) که، هر نقطه ازآن، به‌بیش از دوحوزه مربوط نباشد، تنها شرط قضیه این است که، هیچ‌کدام ازحوزه‌ها درهیچ جهتی، از یك اندازه مفروض، تجاوز نکنند. مثلاً، اگر تمامی سطح را به خانه‌هایی شبیه صفحهٔ شطرنج، تقسیم کنیم، شرط اخیر برقرار می‌شود: درواقع، اگر اندازهٔ مفروض، برابریك سانتی‌متر باشد کافی است که قطرهای

همهٔ خانه‌ها، از یک سانتی‌متر کمتر باشد. ولی، بارعایت این شرط، شرط اول قضیه خراب می‌شود، زیرا، درهرگوشه، نقطه‌ای قراردارد که در چهار خانه مشترك است (به همین ترتیب، در چیدن آجرها، نقطه‌هایی وجود داردکه، درآن‌ها، سه‌آجر به‌هم رسیده‌اند).

شرطاول را، می‌توان با پوشاندن سطح، به‌کمك لکه‌های جدا ازهم برقرارکرد (مثل اسب «خال‌دار»)، ولی دراین صورت (البته به شرطی که‌اندازه را «معقول» انتخاب کرده باشند)، «زمینهٔ اصلی»سطح (که خود، یکی از حوزه‌های تقسیم را تشکیل می‌دهد)، بیشتر از اندازهٔ مفروض ازآب درمی‌آید. یك راه هم این است که، یك رشته دایرهٔ هم مرکز در نظر بگیریم؛ در این‌صورت، شرط اول خراب نمی‌شود، زیرا در هرنقطه، بیش ازدوحوزه باهم تماس ندارند. ولی، با کمال تاسف، دایره‌ها به‌تدریج بزرگ‌ می‌شوند و، درنتیجه، ازمرز اندازهٔمفروض می‌گذرند؛ واگررسم دایره‌ها را درمرز اندازهٔمفروض متوقف کنیم، آن وقت، حوزه‌ای که نسبت به همهٔ دایره‌ها، بیرونی است، خیلی بزرگ‌ خواهدبود. به‌هیچ ترتیبی نمی‌توانید درآزمایش خودموفق شوید. همهٔ این‌ها را، با معرفت شهودی، می‌توان به‌روشنی فهمید، ولی اثبات‌آن‌ها، چندان ساده نیست. با وجود این، این‌قضیه را، برای هرفضایی با هرچند بعد، تعمیم داده‌اند.[1]

---

۱. کمترین تقسیم یك‌حوزه به‌بخش‌ها، به‌تعداد حداکثر بخش‌هایی گفته می‌شودکه دارای نقطهٔ(مرزی) مشترك باشند. اگر بخش‌ها، به‌اندازهٔ کافی‌کوچك باشند، آن وقت‌کمترین تقسیم صفحه یاسطح به‌بخش‌های بزرگتر یامساوی ۳ و، در عین حال، برای خطها یاکمان‌های بزرگتریامساوی ۲ و برای جسم فضایی بزرگتر یا مساوی ۴خواهدبود. نخستین تعریف بعد، که به‌آ. له‌بگ(۱۹۱۱) وبراور (۱۹۱۳) متعلق است، برهمین اساس قرار دارد. (ویراستار ترجمهٔ روسی کتاب)

قضیهٔ دیگری هم وجود دارد که از این قضیه‌ها، خیلی مهم‌تر است، چرا که قریب صد سال از تنظیم آن می گذرد، ولی هنوز اثبات آن، به‌دست نیامده است.[1]

این قضیه، به مسالهٔ چهار رنگ مشهور شده است (تا زمانی که، این مساله، حل نشود، نمی‌توان آن را قضیه نامید). مساله چنین است: اگر بخواهیم نقشه‌ای را که روی یك سطح همبند ساده، مثل سطح کرهٔ مصنوعی یا یك صفحهٔ کاغذ رسم شده است، «به‌درستی» رنگ کنیم، تنها ۴ رنگ لازم است.

بدیهی است، روی نقشه می‌توان به نقطه‌هایی برخورد، که در آن‌ها، تعداد دلخواهی حوزه (یا کشور) به‌هم رسیده باشند؛ ولی این، به‌معنای آن نیست که هر کدام از آن‌ها باید به رنگ جداگانه‌ای باشند (مثلاً، صفحهٔ شطرنج را می‌توان تنها با دو رنگ مختلف، «به‌درستی» رنگ کرد، ولو این که نقطه‌هایی درروی آن پیدا می‌شود که، در آن‌ها، چهار خانه به هم رسیده‌اند). برای این که لازم باشد، دو کشور را با دو رنگ مختلف نشان دهیم، باید دست کم در یك خط مرزی- ولو کوتاه، مشترك باشند. همچنین، لزومی ندارد که همهٔ دریاها را به‌رنگ آبی ویا تمامی قلمرو بریتانیای کبیر را به رنگ گلی در آوریم؛ تنها شرط این است که هر دو کشور مجاور، با رنگ‌های متفاوت باشند. کسی نتوانسته است نقشه‌ای درست کند که، برای رنگ کردن آن، به بیش از چهار رنگ نیاز باشد: کسی هم نتوانسته است ثابت کند که

---

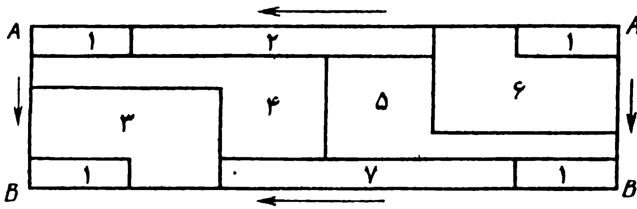
۱. این قضیه، درسال ۱۹۷۶، به‌کمك کامپیوتر، ثابت شد (ستفن بار، کتاب خود را درسال ۱۹۶۴ نوشته است). برای آگاهی بیشتر دربارهٔ چگونگی اثبات این قضیه، به نشریهٔ «آشتی با ریاضیات»، سال پنجم شماره ۵ (آذر و دی ۱۳۵۷) صفحهٔ ۳۹، به مقالهٔ «مسالهٔ چهار رنگ» مراجعه کنید.

چنین نقشه‌ای وجود ندارد (باوجودی که انبوهی از دانشمندان، روی این مطلب کار کرده‌اند). ثابت شده است که پنج حوزه را نمی‌توان طوری قرارداد که هر کدام از آن‌ها با همهٔ چهار حوزهٔ دیگر، تماس داشته باشد (این اثبات، اگر بخواهد به صورتی دقیق انجام شود، دشوارتر و زیرکانه‌تر از آن است که قابل طرح در این کتاب باشد)؛ ولی با وجودی که وجود پنج حوزه از این گونه می‌توانست درستی قضیهٔ چهار رنگ را رد کند، عدم وجود آن، کمکی به حل مسالهٔ چهار رنگ نمی کند.

می‌توان از رسم نقشه آغاز کرد و، همان طور که رسم نقشه جلو می‌رود، حوزه‌های آن را رنگ کرد، ولی اغلب درمیان راه به‌بن‌بست برمی‌خوریم و ناچار می‌شویم، برای تجدید رنگ آمیزی، به عقب برگردیم. البته، همهٔ آزمایش‌هایی که انجام شده است، نشان می‌دهد که، می‌توان، از هر موقعیتی که پیش می آید، نجات پیدا کرد، ولی هنوز ثابت نشده‌است که، درحالت کلی و همیشه، راهی برای این‌رهایی وجود دارد.

شگفتی در این‌جاست که توانسته‌اند قضیه‌ای را ثابت کنند که، به نظر می آمد، دشوارتر از قضیهٔ چهار رنگ است: روی چنبره یا هر سطح همبند دوگانهٔ دیگر، می‌توان نقشه‌هایی رسم کرد که، برای رنگ کردن آن‌ها ، ۷ رنگ مختلف لازم است و، ۷ رنگ، برای رنگ‌کردن هر نقشه‌ای کافی است. اگر خواننده‌ای بخواهد دیگران را به تعجب وادارد، می‌تواند شکل ۱۳۲ را، روی یك چنبرهٔ کاغذی رسم کند (نان شیرینی حلقه‌ای ، برای رسم، چندان مناسب نیست) و، بعد از مختصری حرف‌های بی‌سروته (که معمولاً در همهٔ چشم بندی‌ها

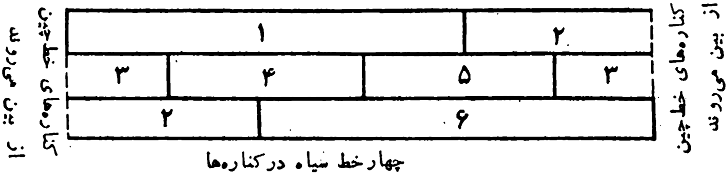
به کار می‌رود)، آن را رنگ کند. روی شکل می‌توان دید که، هفت حوزه وجود دارد که، هر کدام از آن‌ها، با همهٔ بقیهٔ حوزه‌ها تماس دارند (اتصال‌ها را، که با پیکان‌ها نشان‌داده شده‌اند، به‌یاد داشته‌باشید).



شکل ۱۳۲

باید روشن کرد که حوزه‌های مجاور به‌دوضلع روبه‌رو، که بعداز چسباندن به‌هم متصل می‌شوند، باید دارای رنگ‌های متفاوتی باشند. حتی در حالت نوار موبیوس هم، ثابت کرده‌اند که بیش از ۶ رنگ لازم نیست ونقشه‌هایی وجود دارد که، برای‌رنگ کردن آن‌ها،درست به ۶ رنگ‌مختلف نیازمندیم، اگر نواری را، مثل شکل ۱۳۳،تقسیم‌بندی کنیم و، بعدازیك پیچ، به‌هم بچسبانیم، می‌بینیم که، درروی آن، ۶ حوزه به‌دست می‌آید که، هر کدام از آن‌ها، با همهٔ بقیهٔ حوزه‌ها، تماس دارند. ازآن‌جا که نوار موبیوس، دارای یك رویه‌است، آن‌را شفاف به‌حساب‌می‌آوریم: هرقطعه دارای یك، وتنهایك رنگ‌خواهد بود، بدون توجه به‌این‌که ازچه طرفی به‌آن نگاه می‌کنیم (به مفهوم مربوط به‌جهت‌گیری درفصل دوم، مراجعه کنید).

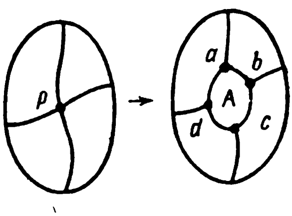
مسالهٔ چهار رنگ را، ازسمت‌های مختلفی، مورد بررسی‌قرار داده‌اند که، ظاهراً، مساعدترین آن‌ها، دستور اولر برای چند وجهی‌هاست، زیرااز‌نظرتوپولوژی، هرنقشه‌ای رامی‌توان به‌یك چندوجهی



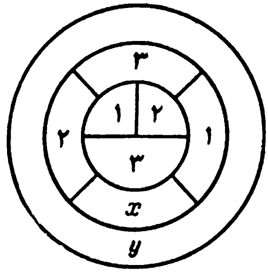
شکل ۱۳۳

تبدیل کرد و، ضمناً، می‌دانیم که، از دستور اولر، می‌توان برای هر شکلی که از وجه‌ها (کشورهای روی نقشه)، یال‌ها (مرز کشورها) و راس‌ها (نقطه‌های برخود مرزها) تشکیل شده باشد، به‌کار برد. باوجود بررسی‌های خسته‌کننده‌ای که دراین راه انجام گرفته است و با وجود این که، ضمن این بررسی‌ها، قضیه‌های جالبی هم ثابت شده است، هنوز خود قضیهٔ اصلی، تن به تسلیم نداده است. این مساله را، به مفهومی، می‌توان مسالهٔ سه رنگ نامید، زیرا اگر بتوانیم نقشه‌ای بسازیم که، برای «منطقهٔ» بیرونی آن، بیش از سه رنگ لازم باشد، آن وقت، می‌توانیم آن را با حوزهٔ دیگری محصور کنیم که، برای آن، به‌رنگ پنجم نیازمندیم.

این وضع، به‌معنای آن نیست که، برای هر نقشه‌ای ازاین‌گونه به جز حوزه‌ای که آن را احاطه کرده است، تنها از ۳ رنگ استفاده می‌شود، بلکه به‌این معناست که، درهمهٔ حالت‌ها، باید بتوانیم نقشه را طوری رنگ کنیم که، برای حوزهٔ «منطقه» بیرونی، تنها ۳ رنگ لازم باشد. درحالت نقشه‌ای که روی شکل ۱۳۴ نشان داده شده است، از رنگ‌آمیزی حوزهٔ داخلی آغاز می‌کنیم: ۱، ۲ و ۳؛ سپس، همان



شکل ۱۳۵

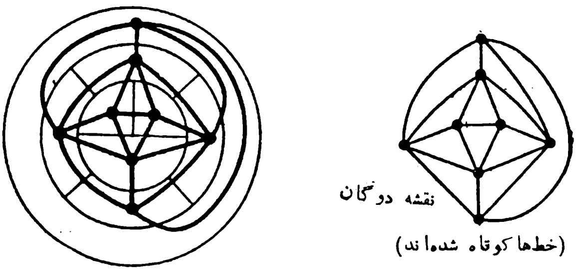


شکل ۱۳۴

طور که نشان داده‌شده است، به حوزهٔ دوروبر آن می‌پردازیم: ازهمان رنگ‌های ۱، ۲ و۳ آغاز می‌کنیم، ولی برای x، رنگ جدیدی لازم است و، برای y، رنگ پنجم. برای این‌که از این وضع نجات پیدا کنیم، باید بتوانیم از رنگ چهارم برای x پرهیز کنیم وآن رابه یکی از همان رنگ‌های داخلی در آوریم که، درنتیجه، بتوانیم، در حالت «منطقهٔ کمربندی» x، با۳ رنگ کارخود را تمام کنیم. اگرروش موفقیت‌آمیزی برای اجتناب ازرنگ چهارم، درمورد همهٔ «منطقه‌های کمربندی داخلی» پیدا کنیم، آن وقت، می‌توانیم این‌بخش از مساله را حل کنیم.

هر نقشه را می‌توان، با تبدیل به آن چه، نقشهٔ درست نامیده می‌شود، به‌صورتی هم شکل درآورد، یعنی به‌صورتی که، در هر نقطهٔ تماس، بیش ازسه حوزه وجود نداشته باشد. این تبدیل، تاثیری بر رنگ‌آمیزی ندارد، زیرا با برگشتن به نقشهٔ اولیه، تنها ممکن است حوزه‌هایی که باهم تماس نداشته‌اند، درنقطه‌ای (ونه دریك قطعهٔ مرز) با هم تماس کنند. معمولی‌ترین روش، برای این‌منظور، این است که نقطهٔ p را، که درآن، بیش از سه حوزه به‌هم رسیده‌اند، حوزهٔ تازهٔ

A را قرار دهیم (شکل ۱۳۵). در این‌صورت، ۴ نقطهٔ a، b، c و d به دست می‌آید که، در هر کدام از آن‌ها، تنها ۳ حوزه کشور به هم رسیده‌اند. اگر این نقشهٔ دوم را، به درستی، رنگ کنیم و، سپس، A را ازمیان برداریم، برای ما بازهم نقشه‌ای باقی می‌ماند که به درستی رنگ‌آمیزی شده است، البته، با این قرار، که ممکن است درجایی که دو رنگ کافی به نظر می‌رسد، از سه رنگ استفاده کرده باشیم. ما در واقع، سادگی را، فدای هم شکلی کرده‌ایم، کاری که اغلب، در ریاضیات، مفید است.

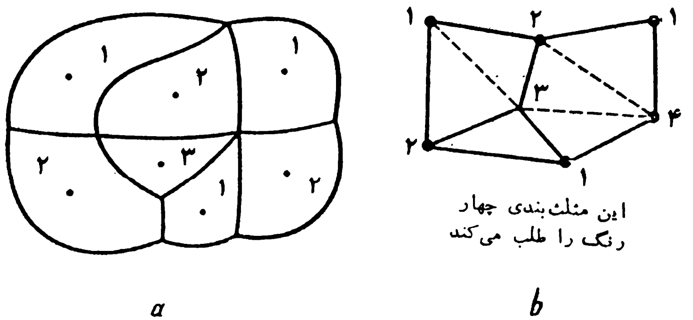


a b

شکل ۱۳۶

می‌توانیم به نقشهٔ بازهم هم شکل‌تری برسیم، به‌شرطی که، ابتدا، نقشهٔ خود را به نقشهٔ دوگان آن تبدیل کنیم. نقشهٔ دوگان، عبارت است از شبکه یا گراف همبندی که، در آن، حوزه‌ها را به وسیلهٔ نقطه‌ها و «مرزها» (یا محل‌های اتصال) حوزه‌ها را به خطهایی نشان دهیم که حوزه‌های مربوط را به‌هم وصل کرده‌اند، روی شکل ۱۳۶–a نشان داده شده است که، چگونه می‌توان نقشه‌ای را، که دوگان نقشهٔ شکل ۱۳۴ است، به دست آورد: هرحوزه را با یك نقطه عوض کرده‌ایم و، اگر دوحوزه مجاور یکدیگر بودند، نقطه‌های نظیر آن‌ها

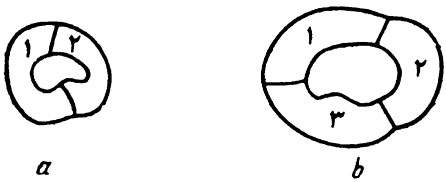
را با خطی به‌هم وصل کرده‌ایم. بعد، نقشهٔ اولیه را فراموش می‌کنیم و تنها نقشهٔ دوگان را باقی می‌گذاریم (شکل ۱۳۶ ـ b). از آن جا که نقشهٔ اولیه، نقشه‌ای درست بود، همهٔ حوزه‌ها (یا «کشورهای») نقشهٔ جدید، مثلثی شکل خواهند بـود. اگـر نقشهٔ اولیـه، درسـت نباشد، می‌توان به‌کمك مثلث بندی، آن را به‌نقشه‌ای درست تبدیل کرد، بدون این که، شبیه شکل ۱۳۵، حوزهٔ تازه‌ای به‌آن اضافه کنیم. نقشهٔ شکل ۱۳۷ ـ a، به‌شبکهٔ‌شکل ۱۳۷ ـ b تبدیل‌شده است؛ سپس، چهارضلعی و پنج ضلعی، با خط‌چین‌ها، به‌مثلث‌هایی تبدیل شده‌اند و، همان‌طور که در بالا گفتیم، این وضع، صدمه‌ای به راه حل نمی‌زند.



شکل ۱۳۷

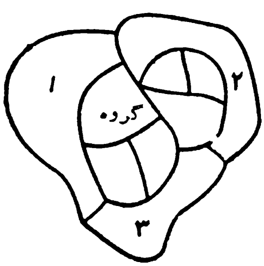
مسالهٔ‌رنگ کردن‌نقشهٔ اولیه، به‌این جا منجرمی‌شودکه‌نقطه‌های نقشـــهٔ دوگان (راس‌های گراف)را، طوری شماره گذاری‌کنیم‌که، هیچ‌دوعدد مساوی مستقیماً‌به هم‌وصل‌نشده‌باشند. تااین‌جا، هیچ‌گونه پیشروی درحل مساله نکرده‌ایم، درعوض، اکنون منحصراً با مثلث‌ها سروکار داریم. روشن است‌که، درهر نقشه‌ای، می‌توان از جزیره‌ها و یا کشورهایی‌که دردل یك‌کشور دیگرقرار گرفته‌اند، صرف نظر کرد، زیرا هر یك ازآن‌ها به‌تنها حوزه‌ای که‌آن‌را احاطه‌کرده است، متصل

است و می‌تواند بـا رنگی (یا شماره‌ای) غیر از رنگ (یـا شمارهٔ) حوزهٔ محیط خود، مشخص شود. به‌همین ترتیب، ازحوزه‌ای هم که به‌وسیلهٔ دویاسه حوزهٔ دوبه‌دومربوط به هم، احاطه شده‌باشد، می‌توان چشم پوشی کرد (شکل ۱۳۸)، زیرا، برای این حوزه‌های محیطی، ۲ یا ۳ رنگ لازم است. و، بنابراین، حوزهٔ درونی‌را می‌توان به‌رنگ سوم یاچهارم درآورد. همین مطلب، درمورد گروهی از حوزه‌ها هم، که به‌طورکامل به‌وسیلهٔ یك، دو یاسه حوزه احاطه شده باشند،درست



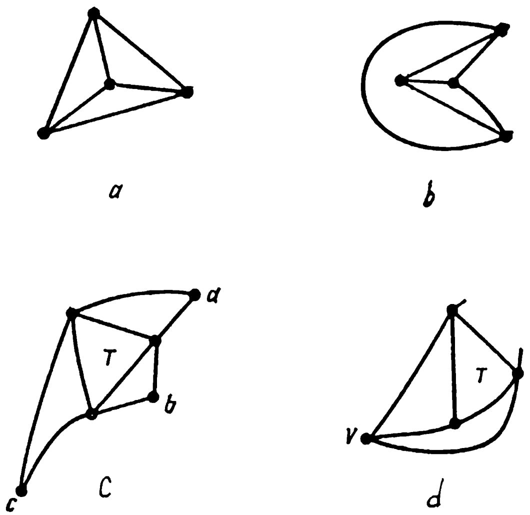
شکل ۱۳۸

است (شکل ۱۳۹). این گروه، خـود یك نقشهٔ جداگانـه را تشکیل می‌دهد و«مساله‌های خاص» مربوط به‌آن‌ها، نمی‌توانند برسه‌حوزه‌ای که آن‌ها را احاطه‌کـرده‌اند، تاثیر بگذارد: بـرای آن‌ها سـه رنگ مختلف لازم است، واگـر ما قضیه را بـرای هـرنقشه‌ای ثابت‌کنیم، می‌توان‌آن را برای‌این گروه جدا شده هم به‌کاربرد.



شکل ۱۳۹

به‌این‌ترتیب، در هیچ گرافی، حوزه‌های مثلثی وجود ندارد که، در درون خود، شامل نقطه یا خط دیگری باشد، به جز مثلث بیرونی (اگر چنین مثلثی وجود داشته باشد). به‌همین ترتیب، درهر نقطه‌دست کم، چهار خط به هم می‌رسند، زیرا، تعداد کمتر تنها ممکن است در مورد یك مثلث (احتمالاً تغییرشکل داده شده) پیش‌آید (که باتوجه به شکل ۱۴۰–b، منع شده‌است). به‌ضلع‌های‌هرمثلث T، سه مثلث دیگر، بـا راس‌هـای غیر وابستهٔ a و b و c، متصل شده است (شکل ۱۴۰ – c)، زیرا اگر دوتـا ازآن‌ها، راس مشترك V را داشته باشند،

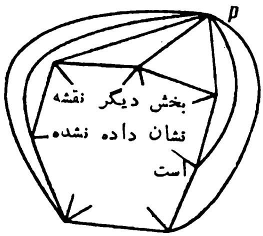


شکل ۱۴۰

به‌شکل ۱۴۰ – d می‌رسیم (که متناظر است با شکل ۱۴۰ – b).

اگر نقشه، روی کـره رسم شده باشد، می‌توانیم آن را روی صفحه باز کنیم، همان‌طور که درمورد چندوجهی‌ها عمل کردیم (فصل اول)؛ ضمناً حوزهٔ مربوط به «رویهٔ پشتی» سطح کره، به حوزهٔ‌بیرونی

نقشهٔ جدید منجرمی‌شود. درحالت گراف (نقشهٔ دو گان)، این‌حوزه‌به یك نقطهٔ جدید بیرونیp، که به وسیلهٔ خط‌هایی بـه هر یك ازنقطه‌های بیرونی سابق مربوط شده است، وبه‌این نتیجه که، چندضلعی بیرونی،



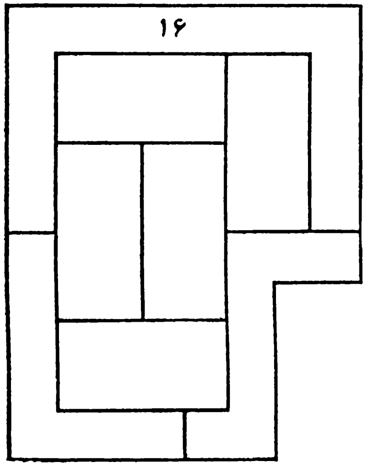
شکل ۱۴۱

همیشه به‌شکل مثلث درمی‌آید، منجر می‌شود (شکل ۱۴۱).

ازاین جا بـه بعد، خواننده بایـد تنها به‌خودش اعتماد کند: ما به‌ترتیب، آن‌چه می‌دانستیم طرح کردیم وچیز دیگری نمی‌توانیم به‌آن اضافه کنیم، و هیچ پیشنهاد دیگری، جز حل مساله، نداریم. چه بسا، چشمان نافذ و کنجکاو یك جوان، بتوانـد چیزی را ببیند که از چشم متخصصان به‌دور مانده است.

برای این که، دشواری رنگ کردن نقشه را بهتر احساس کنید، بازی زیر را به‌شما پیشنهاد می کنیم کـه هم سرگرم‌کننده است و هم من‌تواند به‌شما کمك کند. دراین بازی، دونفرشرکت دارند. بازی‌کن A، حوزه‌ای را رسم می کند. بازی‌کـن B، این حوزه را رنگ (یا شماره گذاری) می‌کند و حوزهٔ بعدی را رسم می‌کند. بازی‌کن A، حوزهٔ دوم را رنگ (یـا شماره‌گـذاری) وبعـد حـوزهٔ سوم را رسم می‌کند و همین‌طور تا آخر. این بازی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که به‌رنگ (یا شمارهٔ) پنجم نیاز افتد: هرطرفی که ناچار باشد از رنگ

(یا شمارۀ) پنجم استفاده کند، بازی را باخته‌است.



شکل ۱۴۲

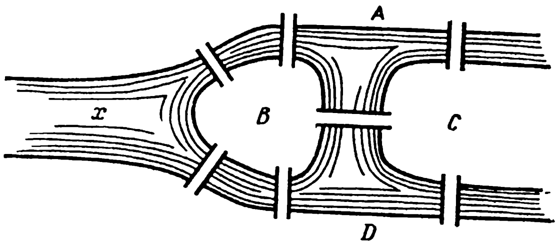
معما. می‌خواهیم نقشۀ شکل ۱۴۲ را رنگ‌آمیزی کنیم. مساحت هرحوزه برابر است با ۸ متر مربع، به‌جز حوزۀ بالا، که مساحتی برابر ۱۶ متر مربع دارد. این رنگ‌ها را در اختیار دارید: قرمز، که درست برای رنگ کردن ۲۴ متر مربع کافی است؛ زرد، که برای ۲۴ متر مربع کفایت می کند؛ سبز، که برای رنگ کردن ۱۶ متر مربع کافی است؛ آبی، که با آن می‌توان ۸ مترمربع را رنگ کرد. نتیجه رنگ‌آمیزی باید با شرط عادی سازگار باشد؛ یعنی حوزه‌های مجاور را نمی‌توان به‌یك رنگ درآورد. پاسخ را در ضمیمۀ IV ببینید.

۸
گراف‌ها

پل‌های کینگس‌برگ

درفصل قبل، نقشه را به‌گراف تبدیل کردیم تا بتوانیم ساختمان آن‌را، به‌صورتی عینی‌تر، نشان‌دهیم. جالب این‌است که، همین‌روش، به‌عنوان سر آغازی برای تکامل توپولوژی درآمد.

زمانی درشهر کینگس‌برگ(کالینین‌گراد امروز)، هفت‌پل‌وجود داشت. دو جزیره ، آن‌ها را بین خود با ساحل مربوط می‌کردند



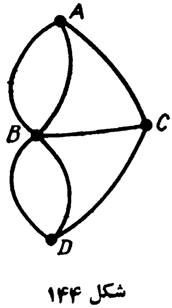
شکل ۱۴۳

(شکل ۱۴۳). در ابتدای سدهٔ هیجدهم، معمایی طرح شد که، بعدها ، شهرت فراوانی پیدا کرد. معما، چنین بود: آیا می‌توان از همهٔ‌پل‌های

کینگسبرگ، به‌نحوی عبور کرد که ، از هر کدام آنها ، تنها یک‌بار گذشته باشیم؟

این‌معمـا هم ، شبیه مسألهٔ چهاررنگ درآمد ، زیرا هیچ‌کس نمی‌توانست، باتوجه به‌شرط موجود ، از پل‌هـا عبور کند و، ضمناً، کسی هم نمی‌توانست عدم امکان آن‌را ثـابت‌کند. خواننده می‌تواند روی شکل ۱۴۳ آزمایش کند ومتوجه شود که ، این مسأله ، تا چه‌حد دشوار است.

اولر، در سال ۱۷۳۶، بـا تبدیل نقشه به‌گراف (شکل ۱۴۴) ـ که روی‌آن، خشکی‌ها بانقطه و پل‌ها باخط نشان داده می‌شد ـ ثابت کرد که، معما، جواب ندارد. او که روی‌چندوجهی‌ها مطالعه می‌کرد، توانست قانونی کلی را کشف کند که ، برای همهٔ این‌گونه گراف‌ها ، درست باشد. می‌توان متوجه شد که، برخلاف‌گراف‌های فصل قبل ، در شکل ۱۴۴ ، یـال‌های «اضافی» A - B و B - D هم وجود دارد ، ولی در واقع، وضع پل‌ها درست به‌همین‌صورت است.



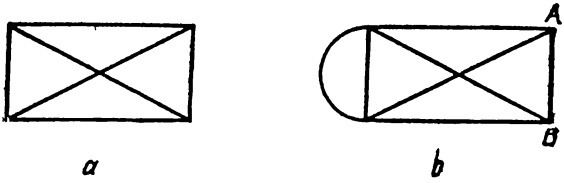
شکل ۱۴۴

قانون اولر ، چنین است . در هررأس گراف ، چندخط (و در این‌جا، چندپل) به‌هم رسیده‌اند. اگر تعداد این‌خط‌ها، فرد باشد، رأس

را فرد، واگر تعداد خطها زوج باشد، رأس را زوج می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد که، در هر گراف، تنها تعداد زوجی از رأس‌های زوج می‌تواند وجود داشته باشد (ویا اصلا، چنین رأس‌هایی وجود ندارند). ازخواننده می‌خواهیم، خودش برای اثبات این حکم تلاش کند؛ برای این‌منظور، می‌تواند اثبات قضیهٔ اولر را ـ که در فصل اول از آن صحبت کردیم ـ راهنمای خود قرار دهد.

عبور ازخطها، به‌نحوی که از هرخط تنها یك‌بار عبور شود، وقتی، وتنها وقتی ممکن است که هیچ‌رأس فردی وجود نداشته‌باشد و یا تنها دوتا از آن‌ها، درگراف، وجود داشته باشد. در حالت‌گراف پل‌های کینگس‌برگ، ۴ رأس فرد دیده می‌شود و، بنابراین، عبور از آن‌ها، باتوجه به‌شرط مسأله، ممکن‌نیست. می‌توانیدآزمایش کنید که، اگر در بخش X (شکل ۱۴۳) پل تازه‌ای ساخته شود، دیگر عبور از آن‌ها،کار مشکلی نخواهد بود، زیرا در این‌صورت، رأس‌های A و B (شکل ۱۴۴)، چهارخطی می‌شود. معلوم شده است که برای عبور ازپل‌ها، باتوجه به شرط لازم، باید از یك رأس فردآغاز کنیم.

شما می‌توانید به‌دوست خود پیشنهاد کنید یك گراف رسم کند، آن‌وقت، بلافاصله، به‌او خواهید گفت که می‌توان روی‌آن، باآغاز از نقطه‌ای طوری حرکت کرد که از همهٔ خطهای رابط عبور کنیم و، ضمناً، از هرخط تنها یك‌بار؟ روشن است که شما باید تکیهٔ‌کار خود را براین قرار دهید که، به‌طورپنهانی، تعداد رأس‌های فردرا بشمارید. بیشتر ما، در کودکی، به‌دو فهم متفاوت از این موقعیت برخورد داشته‌ایم: از گراف a درشکل ۱۴۵، نمی‌توان عبور کرد، درحالی که



شکل ۱۴۵

از گراف b می‌توان عبور کرد، البته، بااین‌شرط که حرکت از A یا B آغازشود.

قانون کلی حاکی از آن است که: تعدادگذرگاه‌های جداگانه ، وبی‌ارتباط به‌هم، درمجموعه‌ای ازعبور کلی، برابر است با نصف تعداد رأس‌های فرد (ومی‌دانیم که این‌تعداد، همیشه زوج است). مثلاً، درشکل ۱۴۵-a، که چهاررأس فرد دارد، برای عبور تنها یك‌بار از همهٔ خط‌های رابط، باید ازدوگذرگاه متفاوت عبور کرد.

عدد بتی

می‌توانیم گرافی رسم کنیم که شامل بخش‌های بسته یا حلقه‌ها نباشد: گراف که ازیك تکه تشکیل شده است، چنان است که اگر یکی ازیال‌های آن‌را برداریم ، به‌دوبخشی تجزیه می‌شود که به‌هم بستگی ندارند (یکی ازاین بخش‌ها می‌تواند، تنها یك‌نقطه‌باشد).چنین گرافی را درخت می‌نامیم و ، به‌سادگی، می‌توانیم متوجه شویم که ، در آن ، تعداد رأس‌ها همیشه یك‌واحد بیشتر ازتعداد خط‌ها یایال‌هاست. علت این امر آن است که اگر دستور اولر را ـ که برای هرشکلی درست است ـ در مورد درخت به‌کاربریم از آن‌جا که تنها دارای یك‌وجه است(بخش‌بیرونی‌صفحه)، وضمناً، بایدداشته‌باشیم: $G-E+C=۲$، به‌دست می‌آید:

$$۱-E+C=۲ \Longrightarrow C=E+۱$$

هر گرافی را می‌توانیم، با برداشتن چندیال آن، به‌گراف تبدیل کنیم، به‌نحوی که بستگی آن حفظ‌شود(شکل ۱۴۶). فرض کنیم b یال را برداشته‌باشیم (در حالت موردنظر ما: $b=۲$) تااز‌حالت بخش‌های بسته‌نجات‌یابد. درابتدا E یال و C رأس وجود داشت وهم‌اکنون‌دیدیم که، دردرخت، تعدادرأس‌ها یك‌واحد بیش‌ازتعداد یال‌هاست،بنابراین باید داشته‌باشیم:

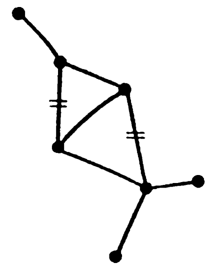
$$C=۱+E-b \Longrightarrow b=۱+E-C$$

(درحالت موردنظر ما: $۲=۷-۸+۱$). عدد b را، عدد بتی گراف مفروض‌گویند که، همیشه، برابر است باتعداد وجه‌ها، منهای ۱. (این عدد ، نام خود را از ۱نریکو بتی، ریاضی‌دان و فیزیك‌دان ایتالیائی ـ سدهٔ نوزدهم ـ گرفته است.)[1]

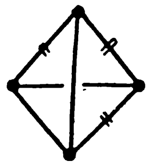
روشن است که همین رابطه در بارهٔ چندوجهی‌ها هم صحیح است، مثلابرای‌چهاروجهی (شکل۱۴۷)،که ۶ یال، ۴ رأس و ۴ وجه دارد، می‌توانیم ۳ یال‌را از آن برداریم، بدون این که رأسی جدابماند ویا شکل، به‌بخش‌های جدا از هم تقسیم‌شود ؛ بنابراین $b=۳$، که یك‌واحدکمتر ازتعداد وجه‌هاست. عددی که به‌طور ساده برابر $G-۱$ است، اساس مفهوم همبندی را تشکیل‌می‌دهد ودربارهٔ سطح هم،البته با جزئی تفاوتی ، به‌کار می‌رود. صفحهٔ دایره‌ای (یا هرشکل دیگری که، از نظر توپولوژی، هم‌ارزمربع‌بدون‌سوراخ‌باشد) ، نمی‌تواند از پهنا بریده‌شود ، بدون این که، به‌دوبخش تقسیم شود (برش «از پهنا»)،

---

۱. اصطلاح «عدد بتی» به‌هانری پوانکاره ، ریاضی‌دان فرانسوی تعلق دارد واو را ، خیلی بیشتر از انریکو بتی، باید مؤلف این‌مفهوم دانست.م.

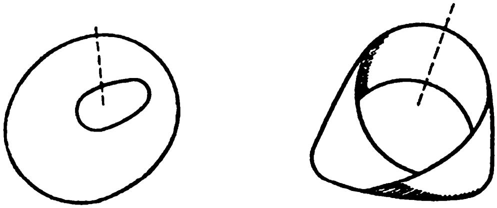


شکل ۱۴۶



شکل ۱۴۷

یعنی از کناره‌ای‌آغاز و به‌کناره‌ای ختم‌شود). بنـابراین، در «دیسك» توپولوژیك، عدد بتی برابر است بـا صفر. از طرف دیگر، در حلقه یا نوار موبیوس، عددبتی برابر است با ۱: درهریك از این‌حالت‌ها، می‌توانیم برش را در طـول خطچین شکل ۱۴۸ انجام دهیم ، بدون این‌که‌سطح متناظر آن، به‌دوبخش جدا ازهم، تقسیم شود. در«دیسك» با دوسوراخ، عدد بتی برابر است با ۲. ولی دربارهٔ سطح کره،وضع چگونه است؟ ازآن‌جاکه سطح کره، دارای‌کناره نیست ، نمی‌توانیم آن‌را، از پهنا، ببریم ، ولی اگر سوراخی در آن به‌وجود آوریم تـا کناره‌ای پیدا شود، آن‌وقت ، یك دیسك توپولوژیك به‌دست می‌آید (باید سوراخ راکشید وشکل‌را مسطح کرد).

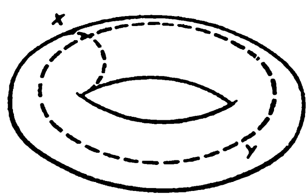


شکل ۱۴۸

ولی در مورد چنبره یابطری‌کلین، وضع به گونهٔ دیگری‌است:

چنبرهٔ باسوراخ‌را نمی‌توان به‌صورت‌دیسك یاحتی استوانه‌تغییرشکل داد (این‌مطلب، برای بطری‌کلین هم درست‌است). وقتی که‌ازسوراخ صحبت می‌کنیم، منظورمان یك‌شکاف ساده است و لزومی ندارد که، حتماً، شبیه سوراخی‌که ضمن‌کنترل روی بلیت‌هـای راه‌آهن ایجاد می‌کنند، قطعه‌ای دایره‌ای‌شکل باشد (تغییرشکل چنبرهٔ سوراخ‌داررا در زیر مطالعه خواهیم‌کرد).

کاملا روشن است‌که، درمورد چنبرهٔ سوراخ‌دار، دونوع برش عرضی وجود دارد‌که، با انجام هرکدام از آن‌ها ، چنبره، به‌دوبخش جداگانه تقسیم نمی‌شود : یکی ازاین برش‌هـا در جهت عرضی لوله (برش x) و دیگری در امتدادآن (برش y) است (شکل ۱۴۹). اگر برش‌های x و y را انجام‌دهیم، یك‌قطعه به‌دست می‌آید و، بامراجعه به‌فصل پنجم، می‌توانیم متوجه‌شویم که‌کار، در مورد بطری‌کلین هم، به‌همین‌گونه است. درهردوی این‌سطح‌ها، عدد بتی، برابر است با۲.



شکل ۱۴۹

برای پیدا‌کردن عددبتی، بدون این‌که‌سوراخی‌درآن بازکنیم، یك‌برش حلقه‌ای درآن به‌وجود می‌آوریم (که نام‌گذاری‌آن، ماهیت آن‌را نشان می‌دهد): این‌برش از یك‌نقطهٔ دلخواه سطح آغاز می‌شود و، بدون این‌که باخودش‌برخوردکند،درهمان‌جا خاتمه می‌یابد(منحنی ژردان). دراین‌جا، رابطه تغییر می‌کند: برش حلقه‌ای، دیسك‌را به‌دو

بخش تقسیم می کند، ولی درحالت حلقه یا استوانه هم، همین‌وضع پیش می آید. بنابراین، تعداد کناره‌ها را می‌شماریم و می گوییم که b، برابر است با تعداد برش‌های حلقه‌ای که می‌توانیم روی سطح ایجاد کنیم، بدون این که سطح به‌بخش‌های جداگانه تقسیم شود و یا تعداد این بخش‌ها ازمقدار کناره‌ها تجاوز کند[1]. مثلا، دیسك یك کناره دارد و نمی‌توانیم در آن برشی انجام دهیم که بیش ازیك‌بخش به‌دست نیاید؛ یعنی $b = 0$. حلقه دو کناره دارد و می‌توانیم یك‌برش به‌وجود آوریم که بیش ازدوبخش ایجاد نکند؛ بنابراین $b = 1$.

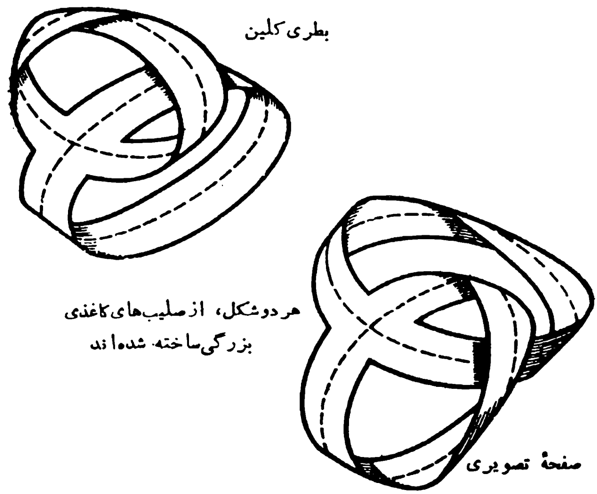
ولی نوار موبیوس هم‌یك کناره‌دارد و می‌توانیم آن‌را، ازعرض، چنان ببریم که به‌دوبخش تقسیم نشود؛ بنابراین، دراین‌جا هم $b = 1$. در چنبره، می‌توانیم دوبرش انجام دهیم (به‌موازات آن‌چه قبلا انجام دادیم)، به‌نحوی که $b = 2$. درحالت‌بطری کلین‌هم،ونه‌سطح‌تصویری، وضع برهمین‌گونه است. درمورد سطح تصویری، وضع تااندازه‌ای دشوارتر است، با وجود این، می‌توان نشان‌داد که، اگر مدل‌گاردنررا (شکل ۱۰۴) در طول دومحور آن ببریم، به‌دوبخش تقسیم می‌شود: مخروط و کروس کَپ. استفادهٔ ازمدل‌ناقص‌ساده‌تراست(شکل b-۶۴)، ولی بهتر است از شبیه بطری‌کلین (شکل a - ۶۴) استفاده کنیم. بی‌اندازه عجیب است که وقتی آن‌را در طول خط‌چین‌ها می‌بریم (هردو مدل در شکل ۱۵۰ نشان داده شده است)، به‌یك مربع مسطح توخالی تبدیل می‌شود. درحالی که صفحهٔ تصویری به‌دوبخش تقسیم می‌شود. دراین‌جا، نقش اصلی، نه به‌عهدهٔ شکل بخش‌های حاصل،

---

۱. ضمناً، برش‌هایی که‌می‌توان دریك‌سطح‌به‌دست آورد، با تغییرشکل پیوستهٔ‌سطح، تفاوتی پیدا نمی‌کنند. م.

بلکه به‌عهدهٔ تعداد آن‌هاست: یکی درحالت بطری کلین ودوتا درحالت صفحهٔ‌تصویری. بنابراین، عددبتی درمورد صفحهٔ تصویری، مثل حالت نوار موبیوس، برابر است با ۱. واین، به‌اندازهٔ کافی، عجیب است.

این مطلب، به‌معنای آن‌نیست که می‌توانیم هر گونه برش حلقه‌ای را درسطح با $b = 2$ ایجاد کنیم؛ می‌توان ازپهلو، چنان برش کوچکی به‌وجود آورد که، ازسطح، قطعه دایرهٔ کوچکی جدا کند.



شکل ۱۵۰

به‌همین‌ترتیب، بعضی از برش‌های عرضی، نوار موبیوس را به‌دوبخش تقسیم می‌کنند: مثلا می‌توان برشی به‌صورت C انجام داد که دوبار کنارهٔ بیرونی را قطع کند. ولی مهم این است که، برش‌هایی وجود دارد که نوار موبیوس را تقسیم نمی‌کنند. حقیقت مهم دیگر،

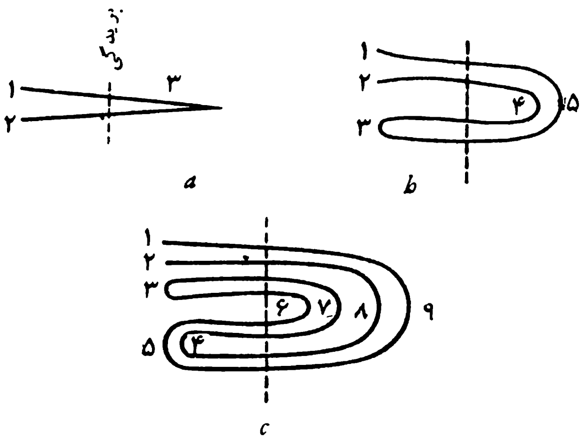
این است که، اگر به‌برش‌های عرضی و حلقه‌ای مجاز (ودر حالت‌سطح اخیر،شکاف‌ها)توجه کنیم، متوجه می‌شویم که هرحلقه با برش عرضی، متقاطع می‌شود. س. لفشتس، از دانشگاه پرینستون، ثابت کرد (درسال ۱۹۲۷) که، این«دوگانگی»، اجباراً، درحالت‌هر تعداد بعد وجوددارد. اکنون مـی‌دانیم که: ۱) تعداد کناره‌ها، ۲) تعداد رویه‌ها و۳) عددبتی، پایاهای سطح دوبعدی‌اند. عددبتی، برای گربه، برابر است با ۹.

بعداً دنبـالهٔ بحث را خواهیم گرفت ، ولی حـالا که سخن از برش‌هـاست ، لحظهٔ مناسبی برای طرح مسألهٔ زیر است. اگرصفحهٔ کاغذی را نصف کنیم و روی‌هم قراردهیم ، دوبـاره تمام‌آن‌را نصف کنیم و غیره ، روشن است کـه ابتدا ۲ ، بعد ۴ ، سپس ۸ و... قطعه به‌دست می‌آید؛ هربار تعداد قطعه‌ها، دوبرابر می‌شود (به‌این‌مطلب هم اشاره کنیم ـ اگرچه هیچ‌ربطی به‌توپولوژی ندارد ـ که اگراین‌روند را ، تنها ۵۴ بار باکارت‌بازی دنبال کنیم ، ستونی به‌دست می‌آیدکه ، ارتفاع‌آن، از فاصلهٔ بین‌زمین تاخورشید تجاوز می‌کند). عددهای ۲، ۴، ۸، ۱۶ و غیره، که در این‌جـا به‌دست می‌آیند، تشکیل یك‌تصاعد هندسی می‌دهند.

همهٔ این‌ها ، زیبـاست، ولی اگرصفحهٔ کاغذرا تاکنیم و، مثلا ، بعد ازشش‌بار تاکردن، آن‌را ببریم، چه‌پیش می‌آید ؟ صفحهٔ کاغذ را، به‌دوطریق، می‌توان تاکرد: هرتا را می‌توان بازاویهٔ قائمه نسبت به‌تای قبلی ، یـا موازی‌آن انجـام‌داد. به‌همین‌ترتیب، برش‌را می‌توان عمود برتای‌آخر یا موازی‌آن، انجام‌داد. درحالت تاهای موازی وبرش‌های عمودی، جواب‌ساده وغیرجالب است: همیشه دوقطعه به‌دست‌می‌آید؛ ولی درحالت برش‌های موازی ، همه‌چیز به‌هم می‌ریزد. بعداز اولین

تا، به‌موقعیتی مـی‌رسیم کـه در شکـل ۱۵۱-a نشان داده شده است (بـا مقطع عرضی) . بعد از مرحلهٔ دوم ، شکل b،در مرحلهٔ سوم ، شکل c و غیره به‌دست می آید . اگر تعداد بخش‌هـای هرمـرحله را بشماریم، به‌دنبالهٔ زیر می‌رسیم: ۱(وقتی که هنوز برشی انجام‌نداده‌ایم؛ روی‌شکل وجود ندارد)،۳،۵، ۹،... ذهن کنجکاو به‌سادگی می‌تواند، قانون‌ادامهٔ این‌دنباله وهمچنین،ارتباط آن‌را بادنبالهٔقبلی، به‌دست‌آورد: به‌هرعدد دنبالهٔ قبلی، باید یك‌واحد اضافه‌کرد:

$$۰+۱,\ ۲+۱,\ ۴+۱,\ ۸+۱,\ldots$$



شکل ۱۵۱

اکنون دیگر، بهتر است باکاغذ وقیچی‌کار کنیم تاباشکل؛ ولی به‌هرصورت، عدد بعدی ۱۷ خواهد بود. اگر شکل ۱۵۱ را با دقت بیشتری مطالعه‌کنیم، متوجه می‌شویم که ، همه‌چیز ، شبیه حالتی است که تعداد بخش‌هـا ، باهر گام، دوبرابر می‌شد ، به‌استثنای این که، در این‌جا، دوکنارهٔ آزاد به‌هم‌نچسبیده دارد : اگر آن‌هـا را به‌هم وصل

می‌کـردیم ، در آن‌محل ، به‌جـای ۱ بخش ۲ بخش به‌دست می‌آید به‌این دلیل است که، به‌هرجملهٔ دنبالهٔ قبلی، یك‌واحد اضافه می‌شود.

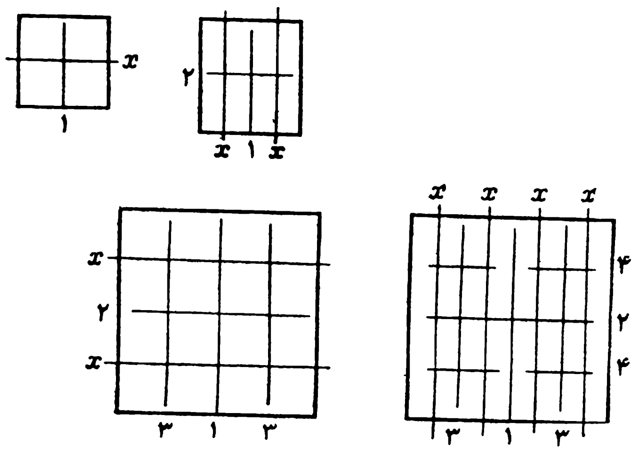
درمورد تاهای عمودبرهم‌وحاصل برش، درحالت‌برش‌عمودی، دنباله‌ای به‌این‌صورت، به‌دست می‌آید:

۲,۳,۳,۵,۵,۹,۹, ...

ودرحالت برش موازی، همان‌دنباله، باآغاز از ۳، ۳. آزمایش‌باکاغذ نشان می‌دهد که، چرااین‌دنباله‌ها پیدامی‌شود، ولی آزمایش‌را نمی‌توان خیلی ادامه داد: ستون حاصل، به‌سرعت کلفت می‌شود و امکان‌بریدن آن ازدست می‌رود.(به‌جاست،دوباره یادآوری کنیم که، درشرط‌بندی باکسی که مدعی است می‌تواند کاغذ را ده‌بار تاکند ، مسلماً خواهید برد. این‌عمل، کاملا ناممکن است: صنعت اجـازه نمی‌دهد که‌کاغذی به‌این بزرگی یـا به‌این نازکی درست شود.) اکنون ، به‌مـاهیت امر می‌پردازیم.

هربارکاغذرا تا می کنیم ومی‌بریم، ولی همیشه،برش‌را تاانتها، یعنی تاجایی‌که برش قبلی وجود دارد، ادامه نمی‌دهیم، یعنی برش‌را کامل نمی کنیم. به‌ازای هرتعداد ازبرش‌های جزئی، چندبخش‌به‌دست می‌آید؟ دنبالهٔ ما، چگونه تشکیل می‌شود؟ اگر تعداد تاها، از ۶ و ۷ تجاوزکند، به‌خاطر ضخـامتی‌که برای‌کاغذ پیدا می‌شود ، نمی‌توانیم آزمایش را ادامه دهیم ؛ ولی بـا مطالعهٔ دقیق آنچه اتفاق می‌افتد ، می‌توانیم به‌شکل ۱۵۲ برسیم. برش بعدی را بـا x نشان داده‌ایم ، برش‌های دیگر شماره گذاری‌شده‌اند: همه‌چیز، یك در میان، دوبرابر می‌شود. ما تنها حالتی‌را درنظر می گیریم که تاهارا، هربار ، بـازاویهٔ قائمه انجام‌دهیم، زیرا درحـالت عکس آن،کار خیلی پیچیده می‌شود

(و روش ما، کارآمدی خود را ازدست می‌دهد). چهـار جهت، برای برش کاغذ وجود دارد: شمال، جنوب، شرق وغرب (در واقع، شرق وغرب، منجر به‌یك نتیجه می‌شوند). معلوم می‌شود که، انتخاب جهت، اثر کمی برجواب دارد. (برش‌را انجام‌دهید، بدون این که به کناره کاملا نزدیك شوید.)



شکل ۱۵۲

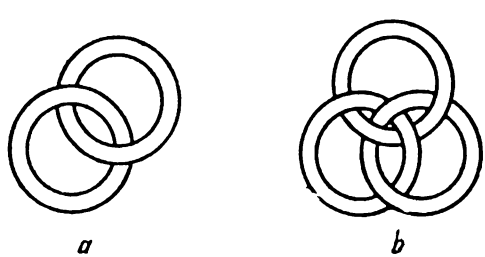
روشن است که، برش‌هـا، منجر به‌قطعه‌های کوچك غیرقـابل برشی، مـی‌شوند. بـرای این که، درایـن‌جا، احساس فریـب‌نکنیم، باید به‌نتیجه اشاره کنیم: گاهی به‌نظر می‌رسد که دو یا چند دنباله‌جابه‌جا شده‌اند ویا دنباله، حالت تناوبی به‌خود می‌گیرد: یکی از آن‌هـا، بعد ازتعداد زوجی عمل ودیگری بعد ازتعداد فردی عمل به‌دست می‌آید. پاسخ درضمیمهٔ V داده شده است.

گره‌ها

مدت‌هـاست که متخصصان توپولوژی دربارهٔ گره‌ها مطالعه

می‌کنند، ولی تاکنون نتوانسته‌اند، دراین زمینه، چیز زیادی را ثابت کنند، البته به‌جز این‌که ثابت کرده‌اند، درفضاهایی که بیش از سه‌بعد دارند، گرهی وجود ندارد. این‌حکم، ازاین‌جا سرچشمه می‌گیرد که، منحنی ژردان، تنهاسطح‌را به‌دوبخش‌تقسیم می‌کند ونه فضای‌سه‌بعدی را. حرف O ، همین‌صفحهٔ‌کتاب را به‌دوبخش تقسیم می‌کند: بخش داخلی وبخش بیرونی؛ درحالی‌که اگر یك‌حلقهٔ سیمی‌را به‌وسط‌اطاق آویزان‌کنیم، هیچ‌چیزی را تقسیم نمی‌کند. احتمالاً ، ضمن بحث ذهنی‌تر دربارهٔ‌گره‌ها، بتوان گفت‌که، اگر دوحلقه در یك‌فضای سه‌بعد به‌هم وصل‌باشند، درفضای چهاربعدی ازهم جدا می‌شوند.

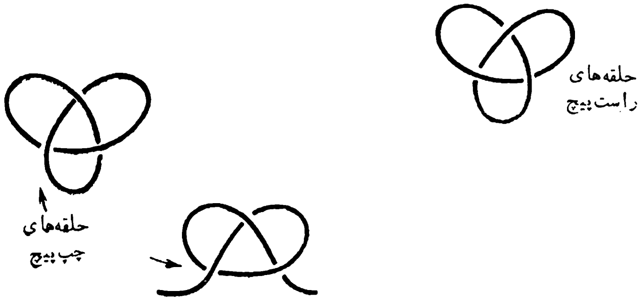
با وجود این، هرمسألهٔ قدیمی در ریاضیات ، ارزش بررسی را دارد: درریاضیات، هرگز نمی‌توان ادعاکردکه،نتیجهٔ حاصل،درانطباق کامل با واقعیت است؛ در ریاضیات، همیشه نزدیکی وجود دارد : از نوع نزدیکی ۳ به‌عدد π (این‌نزدیکی، بسیاری را گمراه‌کرده است: انجیل، مستقیماً تأکیدمی‌کندکه، π برابر است با۳، وهنوز هم‌کسانی پیدا می‌شوندکه آن‌را باوردارند، ولی این‌آدم‌های مضحك، موجب سرگرمی اطرافیان خود نمی‌شوند، بلکه آن‌ها را به‌خشم می‌آورند). دشواری‌های مربوط به‌گروه‌بندی و تنظیم‌گره‌ها ، هنوز برطرف نشده است. نمی‌توان‌گفت‌که ، دوحلقه، براین اساس به‌هم وصل شده‌اندکه قابل جداکردن از یکدیگر نیستند. البته، دوحلقهٔ شکل ۱۵۳–a به‌هم وصل شده‌اند و، ضمناً ، نمی‌توان آن‌ها را از هم جداکرد؛ ولی در مورد سه‌حلقهٔ شکل ۱۵۳–b چه می‌توان‌گفت؟ هیچ‌کدام از آن‌ها ، به‌دیگران متصل نیست، با وجود این ، نمی‌توان آن‌ها را از هم جدا کرد.



شکل ۱۵۳

بعضی از متخصصان توپولوژی،همهٔ گره‌ها را یکسان به‌حساب می‌آورند و، همهٔ آن‌ها‌را، حلقه یادایره می‌دانند؛ ولی به‌سختی‌می‌توان دریانوردان را قانع کرد که گره‌های طناب پیچ درپیچ ودرهم، به‌معنای اتصال سادهٔ دوانتهای آن است، ویا مثلاً، گره «روبان» با گره دریائی هیچ‌فرقی ندارد! اساسی‌ترین ویژگی گره ، در این است که ریسمان را نگه می‌دارد، ولی این‌ویژگی، به‌اصطکاك بستگی دارد که ، به‌موضوع موردبحث ما، مربوط نیست . گاهی ، گره‌ها ، به‌عنوان یك‌محصول فرعی ، ضمن مطالعهٔ سطح‌ها ، پدید می‌آیند . کنارهٔ نوار موبیوس؛ از دید فضای سه‌بعدی، عبارت است از یك‌حلقهٔ پیچ‌خورده، که ازنظر توپولوژی ، می‌توان آن‌را به‌دایره‌ای تبدیل کرد (همان‌طور که در شکل‌های ۱۰۶ تا ۱۰۸ انجام دادیم). ولی اگر، قبل از آن‌که نوار را بچسبانیم، آن‌را به‌جای ۱ نیم‌دور ، ۳ نیم‌دور تاب دهیم ، کنارهٔ آن به‌صورت سه‌تیغه‌ای درمی‌آید (شکل ۱۵۴).اگرآن‌را ببریم و دو انتها را از هم دور کنیم، ساده‌ترین نوع گره به‌دست می‌آید. براین‌اساس، یك‌چشم‌بندی قدیمی وجود دارد. ۴ نوار پهن کاغذی آماده کنید: یکی ازآن‌ها ، پیچی ندارد، دومی۱ نیم‌دور، سومی ۲ نیم‌دور و چهارمی

۳ نیم‌دور پیچ دارند؛ دوانتهای این نوارهارا به‌هم بچسبانید. اگر این



شکل ۱۵۴

نوارها را درخط میانهٔ آن‌ها، ببرید، از اولی دو نوار جدا از هم، از دومی یك‌نوار درازتر، از سومی دونوار متصل به‌هم وازچهارمی یك نوار باگرهٔ سه‌تیغه‌ای به‌دست می‌آید. گرهٔ سه‌تیغه می‌تواند راست‌پیچ یاچپ‌پیچ باشد، ولی باوجود اختلاف روشن بین آن‌ها، بدون‌مراجعه به‌یك معیار واقعی ، نمی‌توان تعیین کرد ، کدام راست و کدام چپ است[1].

این مطلب آموزنده است که ببینیم، فرهنگ‌ها ، چه‌تعریفی از «راست» و «چپ» می‌کنند. یکی ازاین فرهنگ‌ها[2] می‌گوید : اگر رو به‌شمال بایستیم ، سمت‌چپ در جهت مغرب وسمت راست در جهت مشرق خواهد بود. همین‌تعریف، درفرهنگ دیگری[3] شاعرانه‌تر آمده

۱. می‌توان فرض کرد که، در طبیعت، چنین معیار عمومی وجود داشته باشد (در فیزیك اتمی)، ولی ازنظر توپولوژی، نمی‌توان آن‌را تعریف کرد.

۲. American College Dictionary

۳. Funk and Wagnall's

است: سمت‌چپ، یعنی، «جهت شمــال ، وقتی که طلوع خورشید را می‌نگریم». انتظارداریم که مؤلف، برای تعریف سمت‌راست، توضیح دهد که بــاید رو به‌غروب خورشید ایستاد ، ولی چنین نیست ؛ سمت راست، مثل قبل،طرف شمال‌نیست، بلکه طرف‌جنوب‌است. فرهنگ سوم[1]، خود را در موضع انسان‌شناسی قرار می‌دهد: سمت‌چپ ، در انسان، ضعیف‌تر از سمت راست است ، در حالی که ، سمت راست، تکامل بیشتری پیدا کرده است. وبالاخره، در فرهنگ چهارم[2]،تعریف جالب‌تری آمده‌است؛ درآن‌جا،براختلاف بین‌راست وچپ درسیاست تکیه می‌کند. در بارهٔ تعریف پهنا و ضخامت هم، وضع به‌همین گونه است: همه‌چیز مربوط به‌این‌است که سرخود را چگونه نگه‌داشته‌اید. این‌ها، مفهوم‌هایی نسبی‌هستند. اگرمی‌خواهید بحثی‌طولانی، بی‌فایده وکاملاً خنده‌دار به‌وجودآورید، می‌توانید ازکسی (وچه بهتر، ازیك آدم جزمی) بپرسید : چرا وقتی که تصویر خود را در آئینه می‌بینید ، چپ وراست شما عوض‌می‌شود، ولی بالاوپایین‌شما عوض نمی‌شود. اگر باکسی روبه‌رو باشید که با این‌گونه پرسش‌ها آشنا باشد می‌تواند پاسخ بدهد که: تصویر آئینه‌ای جاها را عوض می‌کند نه سمت‌چپ و راست یا جلو و عقب را (این‌پاسخ، درست است) . آن‌وقت ، از او بپرسید: وقتی که جلو آئینه می‌ایستد و مدادی را در دست راست‌خود به‌طور قــائم و رو به بــالا می‌گیرد ، چرا مداد در دست چپ تصویر قرار می‌گیرد، ولی همچنان روبه‌بالاست. به‌احتمال زیاد، طرف‌شما درپاسخ‌گویی به‌بن‌بست می‌افتد.

---

۱. Webster's New Collegtate
۲. Encyclopaedia Britannica

۹

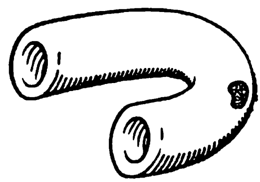
دربارهٔ چنبرهٔ سوراخ‌دار

داور. رسیدگی به پرونده آغاز می‌شود. آقای جونز، خواهش می‌کنم دلیل‌های خود را مطرح کنید، تختهٔ سیاهی درمقابل شماست که هروقت مایل باشید می‌توانید تصویری روی آن رسم کنید.

جونز. طرف بسیارمحترم من، دکتر سیتوس، تاکید می‌کند که لاستیك تویی اتومبیل را پشت ورو کرده است.

سیتوس. (حرف اورا می‌برد). بعد از آن‌که، سوراخ کوچکی، ازپهلو در آن به‌وجود آوردم.

جونز. درست است. ایشان ادعا دارندکه، این کاری عجیب است و، در واقع، اگر درست باشد، من‌هم تعجب می‌کنم. من گمان می‌کنم تنها نصف لاستیك تویی را می‌توان پشت ورو کرد؛ خودتان ملاحظه بفرمائید (شکل ۱۵۵ را روی تختهٔ سیاه رسم می‌کند).



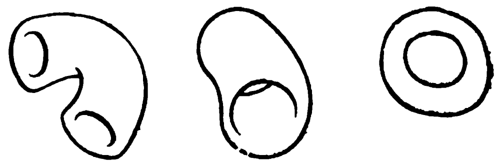
شکل ۱۵۵

داور. دکتر سیتوس، شما نمی‌خواهید دلیل‌های خود را مطرح کنید؟

سیتوس. طرف من، مسلماً، دچار گمراهی‌است. او موقعیتی‌غیر-واقعی را مطرح می‌کند ولاستیك تویی‌اتومبیل را به‌صورت تصویری نشان می‌دهد که معرف دستهٔ توخالی فنجانی است که، از فنجان، کنده شده باشد. روشن است، کسی که به این تصویر نگاه کند، نمی‌تواند چنبره را به خاطر آورد. البته، لاستیك تویی، تغییر شکل یافته و کج شده است، ولی ازلحاظ توپولوژی، یك چنبره است، اگر چه قبل‌از انعکاس، پنچر شده است.

داور. انعکاس؟

سیتوس. منظورم پشت‌وروکردن است، ولی اصطلاح «انعکاس»، آهنگ زیباتری دارد و، ضمناً، علمی‌تر است. اگر شکلی را که رسم شده است، بادقت مطالعه‌کنیم، می‌توانیم متوجه‌شویم که عبارت‌است ازیك چنبره، باسوراخ باریك وبلند وخم‌شده‌ای که ازمرکزمی‌گذرد،



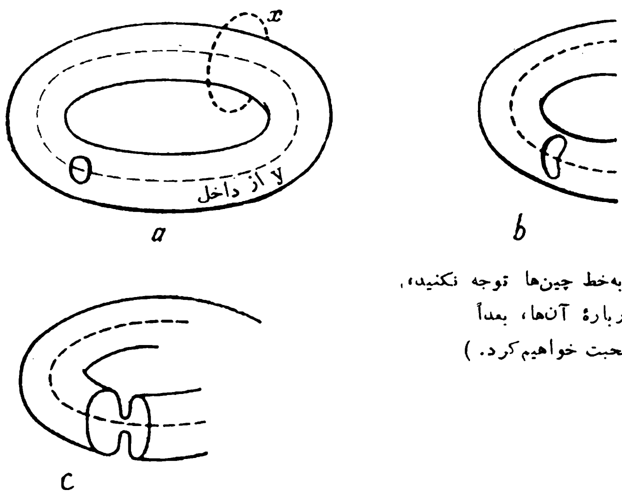
شکل ۱۵۶

درلاستیك تویی که در شکل ۱۵۵ نشان داده است، فضای داخلی، که معمولاً پراز هوای فشرده است، پهن و کشیده شده‌است. من‌می‌توانم روی تخته‌نشان دهم که‌چگونه‌می‌توان ازاین شکل، شکل معمولی‌تری به‌دست‌آورد، بدون این که لاستیك را پاره‌کنم ویا بچسبانم (به طرف

تخته می‌رود وشکل ۱۵۶ را رسم می کند). همان‌طور که می‌بینید، تنها باید آن را کوتاه‌تر کرد.

جونز. دراین میان، بخش درونی، بدون این که پشت‌ورو شود، به حلقهٔ انگشتری ظریفی منجرشده است.

سیتوس. (بی‌اعتنا به‌این جمله). ضمناً می‌خواهیم به‌این نکته‌هم توجه کنید که، لاستیکی که با آن آغاز به کارکردم خاکستری بود، در حالی که اکنون سیاه است! این وضع، به‌این مناسبت پیش آمده‌است که، سطح درونی، سیاه بود و، اکنون، همهٔ بخش بیرونی سیاه است.



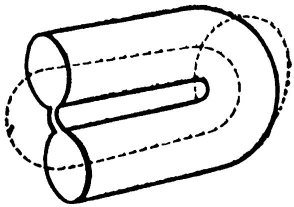
(به‌خط چین‌ها توجه نکنید، دربارهٔ آن‌ها، بعداً صحبت خواهیم کرد.)

شکل ۱۵۷

داور. آیا نمی‌توانید به‌ما نشان دهید که، این عمل، چگونه انجام گرفته است؟

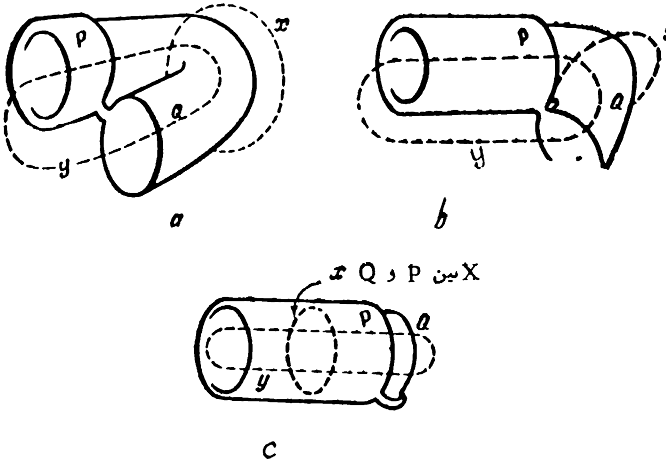
سیتوس. (افسرده)، خوب... اگـر اصرارداریـد. (شانه را بالا انداخت، مدتی باشکل ۱۵۵ وررفت، مجسمهٔ لائوکوئون را به‌خاطر

آورد و، سرانجام، لاستیك، شكل نخستین خـود را به دست آورد [شكل ۱۵۷ - a]، لاستیك سراسر خاكستری بود). بسیار خوب. من اكنون همه چیز را با یك رشته تصویرروشن می‌كنم (وبه‌طرف تخته سیاه‌رفت).روی شكل‌های ۱۵۷-b و۱۵۷-c، سوراخ‌را گشاد كرده‌ایم



شكل ۱۵۸

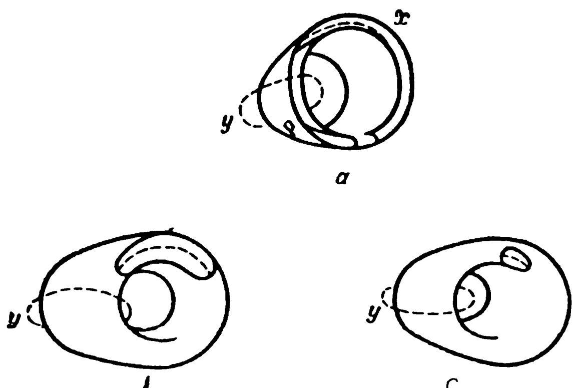
تایك‌برزخ باریك به‌دست آید (شكل ۱۵۸).سپس،شروع به‌بر گرداندن قسمتی ازچنبره‌به‌عقب می كنیم (شكل ۱۵۹ - a)، درست شبیه موقعی



شكل ۱۵۹

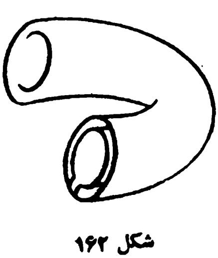
كه بالای ساق چكمه را بر می‌گردانیم. قسمتی از رویهٔ درونی سطح را، كه ظاهر می‌شود، P و رویهٔ بیرونی سطح را Q می‌نامیم. سپس،

این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم (شکل ۱۵۹–b و c) که P در ردیف Q قرار گیرد و، بعد، سوراخ را تا اندازه‌های نخستین خود، کوچك می‌کنیم از روی شکل ۱۶۰– a می‌توان متوجه شد که سوراخ‌ها به شکل منحنی ژردانی، با دو انحنا، در آمده است؛ که دوباره آغاز به کشیدن آن می‌کنیم (شکل ۱۶۰– b و c). در شکل ۱۶۱، چنبره را دوباره به‌صورت اولیهٔ خود، یعنی شبیه‌نان‌شیرینی حلقه‌ای در آورده‌ایم.

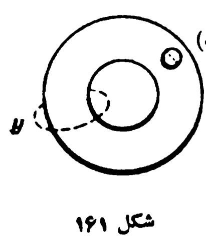


شکل ۱۶۰

می‌توان متوجه شد، P، که ابتدا در رویهٔ درونی سطح بود، اکنون به بیرون آمده است، و عکس همین وضع هم، در مورد Q اتفاق افتاده است. چنبره، پشت ورو شده است.



شکل ۱۶۲

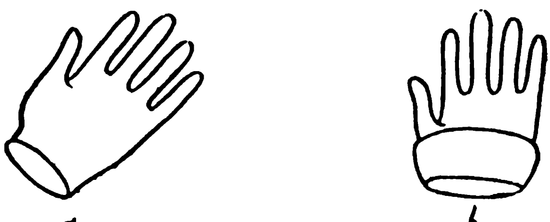


شکل ۱۶۱

جونز. همه چیز را تـا شکل ۱۵۹ - c می‌فهمم؛ ولی در این جا باید توقف کرد، زیرا تنها تا این جا می‌توانید، با لاستیك واقعی، عمل کنید. اجازه بدهید شکل ۱۵۹ - c را دوباره‌سازی کنیم، تا با واقعیت (یا با تصور شما دربارهٔ آن)، بیشتر سازگار باشد. ایـن تصور، در واقع، چنین است (شکل ۱۶۲ را رسم می کند) و نیمهٔ درونی، درست به همان وضع نخستین است: شما خیلی ساده، اسم آن را پشت ورو کردن گذاشتید. همهٔ نقطه‌هایی از آن، کـه قبلاً با هم دیـده می‌شدند، اکنون نیز، با هم دیده می‌شوند ، و آن‌هایی که از رویـهٔ مقابل نگاه کنند...

سیتوس (حرف او را قطع می کند). بله، ولی قبلاً این نقطه‌ها را از درون می‌دیدید، درحالی که، اکنون، ازبیرون دیده می‌شوند.

جونز (به‌طرف تخته می‌رود). به نظرم می‌رسد که بتوانم مطلب را روشن کنم. دربرابرما یك دستکش قرار دارد (شکل۱۶۳ - a) که فرض می کنیم از درون سیاه واز بیرون خاکستری باشد. اکنون سعی می کنیم آن را پشت ورو کنیم. ابتدا، مچ آن را، تا آن جا که ممکن

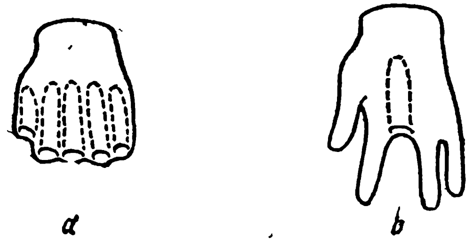


a شکل ۱۶۳ b

است، بـرمی گردانیم (شکل ۱۶۳ - b)، هنوز انگشتان درجای خود قراردارند (شکل ۱۶۴ - a) همهٔ آن‌ها را، به‌جز انگشت میانه، بیرون می کشیم(شکل ۱۶۴ - b)، آقایان‌محترم، خوب‌توجه کنید، اگرسوراخ

دستکش را بدوزیم، همهٔ آن‌چه را که دکتر سیتوس عالیقدر «خارجی» می‌نامد، سیاه است؛ ولی دربارهٔ انگشت میانــه چه‌می‌توان گفت؟ آیا هنوز باید آن را هم پشت ورو کنیم یا تنها به بازی با واژه‌ها بپردازیم؟

سیتوس. ولی این، هنوز چنبره نیست.



شکل ۱۶۴

جونز. دوست بسیار محترم من، به هم ارزی توپولوژیك علاقه‌مندند. آیا می‌توانم دستکش را (بعد از دوختن سوراخ آن)، از نظر توپولوژی، هم‌ارز سطح کره بگیرم؟ فرض می‌کنیم کار را با دستکش یك انگشتی آغاز کنیم (شکل ۱۶۵) که‌سر آن را به کنارهٔ سوراخ‌دوخته باشیم. بعد، انعکاس را، به‌همان ترتیبی که‌دکتر ارائه کرد، انجام‌می‌دهیم، عمل را ادامه می‌دهیم، ولی توجه کنید کـه، درخیال هم، نمی‌توانیم، بیش از نصف آن را، پشت ورو کنیم، حتی اگر انتهای انگشت را، به درون، فشار دهیم. و اگر در انتهای انگشت، سوراخی داشته باشیم، آن وقت، کاملاً با لاستیك اتومبیل همسان می‌شود.

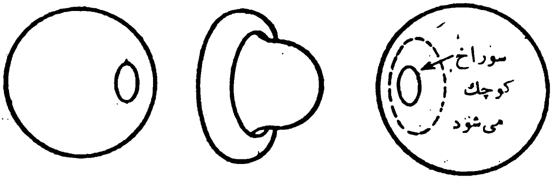
سیتوس. و در این صورت، قابل پشت ورو کردن می‌شود.

جونز. آیـا می‌توانم ازشما خواهش کنم، اختلاف بین موقعیت انگشت وسط را با بقیهٔ انگشت‌ها، روی شکل ۱۶۴ ـ b تشریح کنید؟

سیتوس. ولی... این که خیلی بی‌معنی است! آهان! فهمیدم چه باید کرد! (به‌طرف تخته می‌رود.) این، یك کرهٔ توخالی بایك‌سوراخ

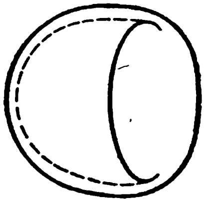
شکل ۱۶۵

است (شکل ۱۶۶). ازطریق سوراخ می‌توان، آن را پشت ورو کرد؛ البته، حتماً قبول دارید که، چنین عملی، ممکن است؟ اکنون سوراخ



شکل ۱۶۶

را می‌چسبانم و بخشی از سطح کره را به‌داخل فرومی‌کنم (شکل ۱۶۷)، آیا، این‌وضع، به‌صورتی اسرارآمیز، نیمی ازهمهٔ انعکاس را ازاعتبار می‌اندازد؟



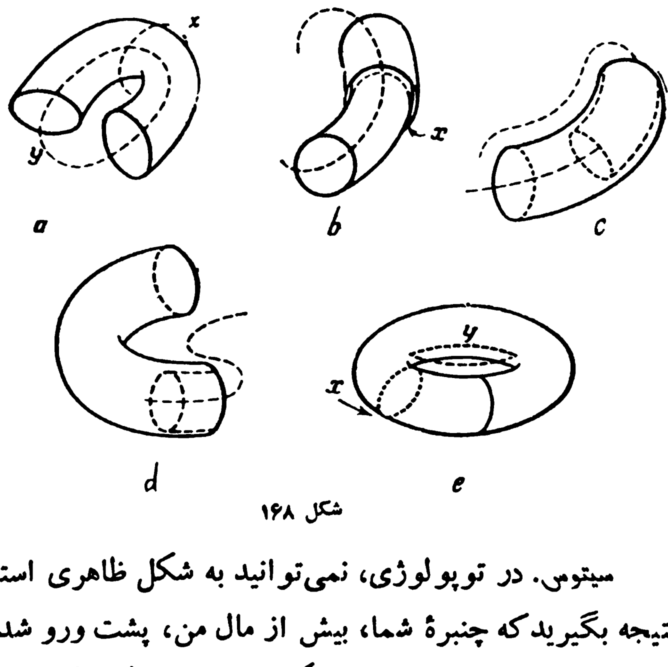
شکل ۱۶۷

جونز. دراین حالت، نه. ولی ما دربارهٔ چنبره بحث می‌کنیم.

سیتوس. آیامی‌توانم بپرسم، چگونه‌می‌توان یک چنبره را، بیشتر از آن‌چه من توانستم انجام دهم، پشت ورو کرد؟ در آن، تمامی بخشی از

سطح، که زمانی درونی بود، اکنون بیرونی دیده می‌شود.

جونز. اجازه بدهید (یك لاستیك‌تویی اتومبیل را برداشت و با قیچی و چسب، کارهایی انجام داد). مـن لاستیك را، ازعرض، بریدم (شکل ۱۶۸ ـ a)، سپس، استوانه‌ای راکه به دست آمد، به طورکامل پشت ورو کردم (شکل۱۶۸ـ b تا d) و دوباره، دوانتهای آن‌را به هم چسباندم (شکل۱۶۸ ـ e)،گمان می کنم همهٔ ماموافق باشیم که، شکل حاصل، به واقع، پشت وروشدهٔ چنبره است. حالا، درست شبیه‌همان چنبرهٔ نخستین است، نه‌همچون دستهٔ توخالی فنجان.



شکل ۱۶۸

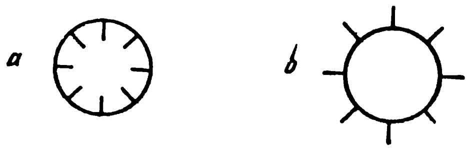
میتوس. در توپولوژی، نمی‌توانید به شکل ظاهری استنادکنید ونتیجه بگیرید که چنبرهٔ شما، بیش از مال من، پشت ورو شده‌است.

جونز. اجازه بدهید، بـه شکل‌هایی مراجعه‌کنیم کـه شما رسم کرده‌اید. می‌خواهم نظرشما را به‌یك انعکاس توپولوژیك جلب‌کنم: اتصال...

سیتوس. چی؟ ولی مگر...

داور. بعداً دکتر، بعداً. آقای جونز ادامه دهید.

جونز. دومنحنی بسته را که به‌هم وصل باشند، نمی‌توان با تغییر شکل‌های توپولوژیك باز کرد. من دومنحنی از این گونه را روی شکل‌هایی که شما کشیده‌اید، رسم می کنم (شکل‌های ۱۵۷تا۱۶۱): یکی ازآن‌ها، x دوربخش لوله‌ای می‌پیچد ودیگری، y، در داخل آن. خوب توجه‌کنید، این دومنحنی به هم وصل‌اند. من آن‌ها را، در تمام مرحله‌های به اصطلاح انعکاس شما، رسم‌کرده‌ام و،کاملاً روشن است که، درپایان کارهم، همچنان به‌هم وصل‌اند.



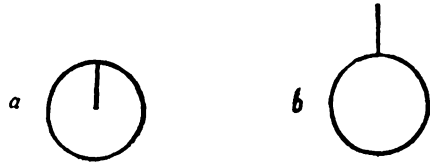
شکل۱۶۹

سیتوس. خوب، منظور؟

جونز. درحالتی که من چنبره را پشت وروکرده‌ام، این دومنحنی ازهم جدا شده‌اند (خط چین‌ها را، روی شکل ۱۶۸، نشان می‌دهد).

سیتوس. چه بی‌انصافی! تنها یکی‌ازحلقه‌ها را بریده‌اید... (ولی حرف خود را قطع کرد، زیرا متوجه شدکه، حتی اگرحلقه را در حالت خودش ببرد، بازهم اتصال‌آن‌ها به‌هم نمی‌خورد). همه چیزبی‌معنی است: اتصال، درفضای n بعدی، یك پایای توپولوژیك نیست. مثلاً، هرکسی می‌داندکه، به‌همین علت، درفضاهایی که بیش‌از۳ بعد دارند، نمی‌تواند گرهی وجود داشته باشد.

جونز. اجازه بدهید به‌استدلال‌اصلی آقای دکترسیتوس برگردم.



شکل ۱۷۰

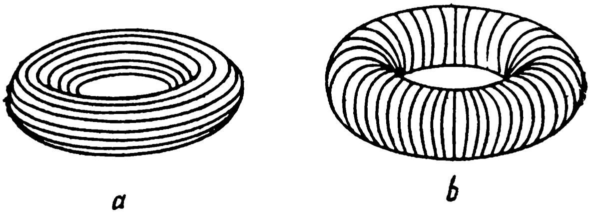
اومی گوید که، اکنون، تمام رویهٔ داخلی سطح، ازبیرون دیده می‌شود. این تاکید به‌این معناست که، اگریک رشته خط راست درنظربگیریم که، در مقطع عرضی، دیده شوند (شبیه شکل ۱۶۹ــ a)، آن وقت، آن‌ها درهمسایگی درون سطح ما خواهند بود. بعدازعمل‌های پیچ در پیچی که دکترانجام داد، این خطهای راست، به‌طرف بیرون قرار می گیرند (شکل ۱۶۹ــb). ولی امیدوارم، آقای دکتربه یادآورند که، شکل ۱۷۰ــ a ، ازنظرتوپولوژی، با شکل ۱۷۰ــ b، یکی‌است و، با اضافه کردن یك بعد، می‌توان تغییرشکل لازم را انجام داد.

ستوس. ولی من، هنوز، ازبعدچهارم استفاده نکرده‌ام.

جونز. من هم، برای جدا کردن حلقه‌ها ازیکدیگر، ازبعد چهارم استفاده نکردم.

سیتوس. ممکن است؛ ولی شما قبلاً در استدلال‌های خودتان، وجود این پاره خطهای راست را، که ازسطح مفروض به صورت شعاعی رسم‌شده‌اند،مفروض گرفتید. وقتی که‌می گویدنیمی‌ازچنبرهٔ من «درست به‌همان ترتیبی که درابتدا بوده» قرار دارد، دست کم، تایید می کنید، خطهای راستی که، تاقبل‌ازانعکاس، درامتداد هم واقع‌اند، بعدازآن هم، به‌همان صورت باقی‌می‌مانند. ولی به‌اعتقاد شخصی‌شما، این مطلب، ربطی به‌توپولوژی ندارد. علاوه براین، اگرچنبره را با شبکه‌ای ازخطهای طولی بپوشانیم (شکل۱۷۱ــ a)، متوجه می‌شویم

که، بعداز انعکاس من، خط‌های این شبکه، به‌صورت عرضی درمی‌آیند (شکل ۱۷۱- b)، و البته، درهردو رویهٔ سطح. این دیگر، یک تغییر واقعی است!



شکل ۱۷۱

جونز. من ازهیچ کدام این‌ها سردرنمی‌آورم. ازچه جهتی، این وضع، پشت وروکردن را مشخص می‌کند؟ به‌نظرمن، همهٔ این‌ها به معنای آن است، که شما، تغییرشکلی انجام داده‌اید که، اصولا، نوع دیگری است. (آن‌ها به‌هم نگاه کردند ونفسی عمیق کشیدند.)

داور. به‌این ترتیب، من نتیجه گیری می‌کنم. موضوع‌های زیر به نفع دکترسیتوس است: اولا، اورویهٔ داخلی سطح را به بیرون برگرداند ومن گمان می‌کنم که، این را، می‌توان طبق معمول «پشت و روکردن» دانست؛ ثانیاً، اگربه زبان‌توپولوژی‌صحبت کنیم، اوعمل‌های پیچیدهٔ خود را روی چنبره آغاز کرد وبه پایان رساند و، سرانجام، اوشبکهٔ طولی را به‌شبکهٔ عرضی تبدیل کرد. ازطرف دیگر، آقای جونزهم، رویهٔ درونی سطح را به بیرون برگرداند، او هم عمل‌های مربوط به‌چنبره را آغاز کرد وپایان داد؛ گرچه اونتوانست‌شبکه را تغییر دهد، درعوض موفق شد، منحنی‌هایی را ازهم جداکند که به‌هم متصل بودند، کاری که دکترسیتوس نتوانست انجام دهد. داوری به هیات منصفه ارجاع می‌شود تاتصمیم خود را بگیرند.

(می‌توان خواننده را هم به هیاتِ منصفه اضافه کرد تا، در تصمیم‌گیری، به‌آن‌ها کمک کند. به‌اعتقاد من، بحث دربارهٔ این مساله، می‌تواند یك بعدازظهر کامل راپر کند و، بازهم به‌اعتقاد من وبرخلاف تصور دکترسیتوس، نمی‌توان این بحث را بی معنی دانست.)

۱۰
پیوستگی و ناپیوستگی

عدد بعدی

خرده‌گیری، از بسیاری جهت‌ها، با بازی با واژه‌ها فرق دارد. توپولوژی ترجیح می‌دهد دربارهٔ اندازه‌ها و شکل‌های دقیق بی اعتنا باشد، ولی درعوض، وقتی‌که صحبت برسر معنای دقیق یك مفهوم یا حکم باشد، بدون هیچ گذشتی، دربارهٔ آن موشکافی می کند. به‌نظر می‌رسد که معنای خط پیوسته را همه می‌فهمند: به خطی پیوسته گویند که پارگی نداشته باشد. ولی‌چنین تعریفی، خیلی ساده، تنها ردیف‌کردن واژه‌هاست و، برای نیازهای ریاضیات، بایدآن را تکمیل کرد. «پارگی» به چه معناست؟ البته، وقتی که طنابی را دریك نقطه پاره کنیم، به دوقسمت جدا ازهم تقسیم می‌شود؛ ولی اگریك تور را پاره‌کنیم، چه‌به‌دست می آید؟ سپس، مثلا، عددهای درست از ۱ تا ۲۰ را انتخاب می کنیم. به یك مفهوم، به نظرمی‌رسد که، اگرعدد ۱۳ را حذف کنیم، دراین‌رشته عددها، یك پارگی به‌وجود می آید، ولی اگر آن را حذف نکنیم، ناپیوستگی وپارگی وجود ندارد. ولی اگر این عددها را با

نشانه‌های روی خط‌کش متناظر کنیم (فرض می کنیم، با خط‌کش‌های معمولی سروکار داشته باشیم، که کوچکترین تقسیم آن، یک میلی‌متر است)، آن وقت، چگونه می‌توانیم دنبالهٔ عددهای خود را پاره کنیم؟ این وضع، به‌چه معناست؟ آیا می‌توانیم بین این عددهای درست، عددهای کسری را قراردهیم و، سپس، بین عددهای اخیر، عددهای کسری دیگری را، وهمین‌طورتابی‌نهایت؟ اگراین روند، درجایی قطع نشود، یعنی اگردرهیچ گامی نتوانیم بگوییم که همهٔ عددها تمام شده‌اند، دراین صورت هرگزنمی‌توانیم به‌پایان‌کاربرسیم. ولی، اگر کسی گمان کند، درجایی، کار را به‌پایان رسانده است، آن وقت،باچه حقی می‌تواند مدعی شود که نمی‌توان عددهای تازه‌ای ـ بااستفاده از کسرهای کوچکتر ـ بین عددهای موجود، قرارداد؟

شایدمی‌توانستیم ازمحلی آغاز کنیم، درآن‌جا نقطه‌ای قرار دهیم، سپس در کنار آن، نقطهٔ دیگری بگذاریم وغیره. ولی‌اگر ـ طبق تاکید کتاب‌های درسی هندسه ـ نقطه جادارد، ولی‌اندازه ندارد (یعنی، درهیچ جهتی دارای بعد نیست)، وقتی که می‌گوییم نقطهٔ دیگری را (که‌آن هم بعدی ندارد) درکنارنقطهٔ اول گذاشته‌ایم، باید این را قبول داشته باشیم که، بین آن‌ها، هیچ فاصله‌ای وجود ندارد. این مطلب را باید به‌این معنا گرفت که، آن‌ها، دریك‌جا واقع شده‌اند وچون تنها اختلاف بین‌نقطه‌ها، جای‌آن‌هاست، بنابراین، صاف‌وساده باید بپذیریم که نقطهٔ دوم برنقطهٔ اول منطبق است. به‌این ترتیب، نمی‌توان نقطه‌ای پیداکرد که، درست، درکنارنقطهٔ اول باشد. این، بهایی است که به خاطرخرده گیری می‌پردازیم که، البته، درتوپولوژی، بسیارمهم‌است.

درمورد ماکزیمم ومی‌نیمم هم، وضع به‌همین‌گونه است.اگر

مجموعهٔ همهٔعددهای از ۱ تاخود ۲ را درنظربگیریم، دربین همهٔ آن‌ها، عدد ۱، کوچکترین وعدد ۲ بزرگترین خواهد بود ولی اگرعددهای بین۱و۲ را (یعنی عددهایی‌را که بزرگتراز ۱ و کوچکتراز۲هستند) در نظربگیریم، آن وقت، همه چیزتغییرمی کند. کوچکترین عدد، باید عددی باشد بلافاصله بعداز ۱ وبزرگتراز آن و، همچنین، بزرگترین عدد، بایدعددی‌باشد بلافاصله قبل‌از۲و کوچك‌تراز آن؛ ولی‌هیچ کدام ازاین دوعدد را نمی‌توانیم نشان بدهیم. (درحالت اول بامجموعهٔ بسته‌ای ازعددها و، درحالت دوم، با مجموعهٔ بازی ازعددها سروکار داریم. باوجودی که به‌نظرمی‌رسد، اختلاف بین آن‌ها ناچیزاست، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، وقتی که صحبت‌ازمجموعه‌ها ـ وبه خصوص مجموعهٔ نقطه‌ها ـ باشد، این اختلاف اهمیتی جدی پیدا می کند.)

ولی، این گفت وگوی دربارهٔ عددها، چه ربطی به توپولوژی دارد؟

برای روشن کردن این مطلب، باید مفهوم مجموعه را دقیق‌تر بررسی کرد تا معلوم شود که چه معنائی می‌توان به‌آن بخشید! یك مجموعه دارای مفهوم‌ها وحکم‌هایی است که نمی‌توان، آن‌ها را، دربارهٔ عضوهای جداگانهٔ این مجموعه به‌کاربرد. این وضع، موقعیت توپولوژی را به‌خاطرمی آورد (والبته، نه درهمهٔ جنبه‌ها)؛ زیرا در آن جا هم از ویژگی‌های فردی، ومثلا شکل، صرف نظرمی کنیم وتنها منحنی‌های‌بسته را درنظرمی گیریم؛ دراین‌جا، شکل‌ها را، به‌طورساده، به عنوان مجموعه‌ای ازموضوع‌هایی به حساب می آوریم که دارای پایاهایی می‌باشند.

پیوستگی

وقتی که چیزی پیوسته نباشد، آن را ناپیوسته گوییم. مجموعهٔ همهٔ عددهای درست، یك مجموعهٔ ناپیوسته است؛ ماسه‌های کنار دریا، مجموعهٔ ناپیوسته‌ای را تشکیل می‌دهند؛ حتی آب (اگر آن را در حالت مولکولی درنظر بگیریم) ناپیوسته است. تنها به این دلیل که، خط راست، شامل بی‌نهایت نقطه است، نمی‌توان آن را پیوسته دانست: روی خط راست، بی نهایت نقطه وجود دارد که نمایندهٔ عددهای کسری گویا هستند، ولی، هنوز بی‌نهایت جای خالی در آن وجود دارد. می‌دانیم، «عدد گویا» به‌عددی گویند که بتوان آن را به صورت نسبت دو عدد درست نشان داد: $\frac{m}{n}$. هرعدد گویایی را که در نظر بگیرید، می‌توان به صورت چنین نسبتی نشان داد $\left(\frac{۸}{۱}=۸\right)$ ، در حالی که، برای عددهای گنگی از نوع π یا $\sqrt{۲}$ ، چنین نمایشی ممکن نیست (تنها می‌توان، مقدار تقریبی آن‌ها را، به‌این صورت نمایش داد).

در توپولوژی، معمولاً، ترجیح می‌دهند از واژه «پیوستگی» بیشتر درمورد «جریان» و «روند» استفاده کنند تا در مورد فضا (خط راست، عبارت است ازفضای یك بعدی)، ولی اگرقرارباشد، ازخط راست، به‌عنوان فضای یك بعدی صحبت کنیم، آن وقت، پیوستگی به معنای آن است که: می‌توانیم مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع برخط راست را، با مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی، درتناظریك به‌یك قرار دهیم. منظور ما از عددهای حقیقی، عبارت است از اجتماع همهٔ عددهای گویا وهمهٔ عددهای گنگ. ثابت شده است که، دست کم به‌اندازهٔ عددهای گویا

(یعنی بی‌نهایت)، عدد گنگ داریم[1]. اختلاف اصلی بین این دو نوع عدد در آن است که، عددهای گویا را می‌توان شماره‌گذاری کرد، در حالی که برای عددهای گنگ، این شماره‌گذاری، ممکن نیست. شماره‌گذاری، به‌این معناست که، عددهای گویا را می‌توان به ردیف ۱، ۲، ۳، ... تا ∞، منظم کرد. واژهٔ «می‌توان»، در این‌جا، به‌معنای آن است که: روندی وجود دارد که، امکان این ردیف کردن را به‌ما می‌دهد، بدون این که حتی یکی از عددها، از قلم بیفتد. دربارهٔ کسرهای گویا، $\frac{m}{n}$، اگرچه نمی‌توان آن‌را به ردیف طبیعی خودشان شمرد (زیرا، اغلب نمی‌توان عددی را مشخص کرد که درست «بعداز» عدد مفروض واقع باشد)، روشی زیرکانه وجود دارد که، به کمک آن، می‌توان این دشواری را برطرف کرد.

همهٔ عددهای درست را به‌صورت کسر می‌نویسیم: $۱ = \frac{۱}{۱}$، $۲ = \frac{۲}{۱}$ وغیره؛ بقیهٔ کسرها را هم، تاحد ممکن ساده می‌کنیم (زیرا در غیر اینصورت، بارها و بارها بایك عدد مواجه می‌شویم: مثل $\frac{۱۲}{۱۰}$ و $\frac{۶}{۵}$).

اکنون از $\frac{۱}{۱}$ آغاز می‌کنیم، بعد $\frac{۱}{۲}$ را می‌نویسیم وسپس، به ترتیب $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۱}$، $\frac{۱}{۵}$، ... در این روش، مجموع دو عددی که برای نوشتن کسر به‌کار رفته است (یعنی مجموع صورت ومخرج هر کسر)، و نه خود عددها، به‌ترتیب صعودی‌اند[2]. مثلاً $\frac{۱}{۱}$ کوچکترین مجموع

۱. درواقع، ثابت‌شده است که، به‌مفهومی، «تعداد» عددهای گنگ به‌مراتب بیشتر از «تعداد» عددهای گویاست .م.

۲. دقیق‌تر، به‌ترتیب غیر نزولی .م.

صورت ومخرج را دارد، بعد $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۱}$ می‌آیند (کسرهایی‌را، که مجموع صورت ومخرج مساوی دارند، به‌ترتیب صعودی بودن خود عددها می‌نویسیم)، سپس، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۱}$ (بامجموع صورت ومخرج برابر۴) ، بعد $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۱}$ (بامجموع برابر۵) وغیره. هرچه جلوتربرویم، بیشتربه کسرهای بینابینی (مثل کسرهای بین $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$) برخورد می کنیم، ماهرگز نمی‌توانیم این روند را به‌پایان برسانیم، ولی به‌این ترتیب، می‌توانیم کسرها را، باردیف تازه‌ای بنویسیم که‌کاملاً منطقی باشد و، ضمناً، هر عددگویا، یکبار وتنها یکبار، در دنبالهٔ ماظاهرشود. وجود این دنباله، به معنای آن است که توانسته‌ایم، همهٔ عددهای گویا را، به‌کمک عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ... شماره‌گذاری کنیم.

درجدول زیر، پایین هر کسرگویا، مجموع صورت ومخرج آن و، سپس درپایین آن، شمارهٔ ردیف کسر، داده شده است:

$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۴}{۱}$	$\frac{۱}{۵}$	...
۲	۳	۳	۴	۴	۵	۵	۵	۵	۶	...
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...

هرمجموعه‌ای‌ازعددها (یانقطه‌ها، یاهرچیزدیگری) که عضوهای آن‌که قابل شماره‌گذاری باشد (مجموعهٔ‌شمارا)، مجموعه‌ای ناپیوسته است. وقتی که می‌خواهند مجموعه‌ای ناشمارارا شرح بدهند، به‌جای واژهٔ پیوستگی، ترجیح می‌دهند از واژهٔ متصله استفاده کنند (اصطلاح

اول را معمولاً، برای روندها به‌کارمی‌برنـد)[1]. عـدد متغیر، ازتمامی نقطه‌های خط راست می گذرد: «حرکت» آن، پیوسته است.

به‌این ترتیب، می‌بینیم که، نامتناهی از دوطریق مختلف به دست می آید: ۱،۲،۳،... تا بی‌نهایت یاتعداد بی‌نهایت نقطه واقع برپاره‌خط راست. توجه‌این‌مطلب‌اهمیت‌بیشتری‌دارد که، دراین‌نمونه‌های‌نامتناهی، دو نوع بی‌نهایت وجود دارد: شمارا (حالت عددهای‌گویا) و ناشمارا (درحالت نقطه‌های واقع برخط راست).

همسایگی‌ها

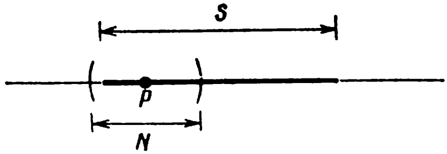
خوانندهٔ ما، حتماً به یاد داردکه آقای جونز، دربارهٔ بعضی‌از خط‌های راست، درفصل قبل، چه‌می گفت: آن‌ها «درمجاورت سطح درونیِ واقع شده‌اند». ماپنظور او را فهمیدیم (به‌خصوص، آن‌چه را که روی شکل مربوطه نشان داده شده‌بود)، اگرچه معنای سخن او، تاحدی، مبهم بود. ولی، درکنار همهٔ خرده گیری‌های احتیاط‌آمیز و لازمی که دربارهٔ نقطه‌ها، بی‌نهایت‌ها وغیرآن‌داشتیم، دربرخی موردها بهتراست از، به اصطلاح «عدم دقت کنترل شده» استفاده کنیم. مثلاً، درابتدای فصل هفتم، ازقضیه‌ای یادکردیم، کـه درآن، ازحـوزه‌ای صحبت می‌شدکه «ازمقدارمفروض، بزرگترنباشد». این جمله، عـدم دقت‌را زمزمه می کند، ولی‌به معنای‌آن است که، قضیهٔ مفروض، بدون

---

۱. باید توجه داشت‌که از واژهٔ «متصله»، بـرای همهٔ مجموعه‌هایی‌کـه عضوهای آن ها قابل شمارش نیستند (مجموعـه‌های ناشما را)، به‌کاربرده نمی‌شود، اگرچه درارتباط بـامجموعهٔ نقطه‌ها (خط راست، صفحه یـا فضا)، مجموعهٔ خط‌های راست، مجموعهٔ صفحه‌ها وغیره، می‌توان ازآن استفاده‌کرد.م.

توجه به کوچکی مقدارمفروض، درست است. همین‌طور، وقتی که می گوییم «چیزی، اندازهٔ مفروضی دارد» ودرهمان حال، این چیز «بی‌نهایت کوچك است، یعنی اندازه‌ای ندارد»، ازهمین «عدم دقت کنترل شده» استفاده می کنیم، اگرچه دراین‌جا، زمزمه‌ای ازعدم دقت «خطرناك» به‌گوش می‌رسد.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان گفت که، نقطه‌ای‌مفروض، «به‌اندازهٔ کافی نزدیك» به‌نقطهٔ دیگرواقع است. واین (شبیه جملهٔ «مقدارمفروض» در قضیهٔ مذکور دربالا) به معنای آن است که نقطهٔ مفروض را می‌توان «به حددلخواه، نزدیك به نقطهٔ دوم» انتخاب کرد. وقتی که دربارهٔ همسایگی نقطه‌ای صحبت می کنیم، هیچ اشاره‌ای به‌اندازه‌های آن نمی کنیم، بلکه فقط این را می‌خواهیم که، این همسایگی، شامل نقطهٔ مفروض باشد و آن را طوری دربربگیرد که، در داخل این همسایگی، بتوان نقطهٔ دیگری آن قدر که مایل باشیم نزدیك به نقطهٔ اول انتخاب کرد. دراین‌جا، هیچ‌چیزمشخصی گفته‌نمی‌شود: ازفاصلهٔ‌نقطهٔ‌اخیربانقطهٔ اول سخنی نمی‌گوییم و، با وجودی‌که درفضای متری که در آن می‌توان فاصله‌ها را اندازه گرفت ـ اغلب برای‌نام‌گذاری قطرهمسایگی ازنماد ε استفاده می‌شود، هرگزخود را مقید به مقدارمشخصی‌از ε نمی‌کنیم. اغلب، وقتی ازبیان «همسایگی ε نقطهٔ P» استفاده می کنیم، منظورمان همهٔ نقطه‌هایی ازهمسایگی است که، فاصلهٔ آن‌ها از P ، کمتراز ε باشد. توجه‌کنید: می گوییم «کمتر» ونمی گوییم «نه‌بیشتر»؛ واین، به‌معنای آن است که، دراین همسایگی، نقطه‌ای پیدا نمی‌شود که حداکثرفاصله را تا P داشته باشد (بابحثی که دربارهٔ وجود ماکزیمم ومی‌نیمم، دربخش اول همین فصل داشتیم، مقایسه‌کنید).



شکل ۱۷۲

البته، همهٔ این‌ها، کاملاً تقریبی هستند، ولی می‌توان آن‌ها را، درحدلازم، دقیق کرد. فرض کنیم، روی خط راست، فاصله‌ای (یا بازه‌ای) مثل S انتخاب کرده باشیم (شکل۱۷۲). S شامل نقطهٔ P است و، دراین نقطه، یك همسایگی مثل N وجود دارد. درهرحالتی، یك چیزمسلم است: در N، دست کم، یك نقطهٔ دیگر از S، داخل شده است، به‌همین ترتیب، می‌توان گفت که، اگرفاصلهٔ S را به‌عنوان «همهٔ نقطه‌های متناظر باعددهای حقیقی بزرگتر از ۱ وکوچکتر از ۲» تعریف کنیم، به فضایی یك بعدی می‌رسیم که در آن، انتهائی وجود ندارد و، در آن، عضوماکزیمم یامی‌نیمم پیدا نمی‌شود (بابخش اول همین فصل مقایسه کنید). چون قرار گذاشته‌ایم که، همسایگی هرنقطه را، می‌توان به‌حد دلخواه، کوچك گرفت، بنابراین می‌توانیم بگوییم که، هرنقطهٔ S دارای یك همسایگی است، به‌نحوی که به‌طورکامل در داخل S قرار گرفته باشند (یعنی شامل هیچ نقطه‌ای، خارج از S ، نباشند). این مطلب، به‌معنای آن نیست که نمی‌توانیم همسایگی‌ها را طوری انتخاب کنیم که‌شامل، نه‌تنها نقطه‌هایی از S ، بلکه ضمناً نقطه‌های بیرون از آن هم باشند، بلکه به‌معنای این‌است که، اگرهمسایگی‌ها را به‌قدرکافی کوچك بگیریم، آن وقت، شامل نقطه‌های «بیگانه» نمی‌شوند.

روشن است که این حکم، درمورد نقطه‌های انتهائی درست نیست، ولی می‌دانیم که S، انتهائی ندارد. البته، همه چیزبه تعریف‌ها

مربوط می‌شود و، نیازبه تعریف‌های دقیق، ازویژگی‌های ریـاضیات است. گاهی، نبودن تعریف هم، نقشی اساسی بـه عهده دارد: درهر حالتی، باید به‌روشنی بفهمیم که، حکم مورد نظرما، تاچـه حـد دقیق است.

شکل ۱۷۳

بازهم تاکید می کنیم که، وقتی باقطعه‌ای ازخط راست سروکار داریم که باعددهای بزرگتراز۱وکـوچکتراز۲ متناظراست، ونقطه‌ای نزدیك به ۱ روی آن انتخاب کنیم، همشیه می‌توانیم نقطهٔ دیگری پیدا کنیم که به ۱ نزدیکتر باشد (شکل ۱۷۳). اگر کسی به‌این فکربیفتد که، سرانجام، خودرا به‌نقطه‌ای برساند که آن قدربه۱نزدیك باشد که نتوان نقطهٔ دیگری، که‌نزدیکتربه۱ باشد، پیدا کرد، بنابراین، بین‌هر نقطه‌ای، هرقدرهم‌نزدیك به۱انتخاب شود، بازهم‌جایی وجود دارد؛ حتی‌برای این نقطه یك همسایگی وجود دارد که، تنها، شامل نقطه‌هایی ازفاصلهٔ ۱تا۲ است.

احتمالاً خواننده متوجه شده‌است که منظورما ازفاصله، یابازه، همان چیزی است که مجموعهٔ بازنقطه‌ها نامیده می‌شود. اگـر بـا یـك مجموعهٔ بسته سروکار داشته‌باشیم (مثلاً، همان فاصلهٔ قبلی را، به‌اضافهٔ خود دوانتهای ۱و۲، درنظر بگیریم)، دیگرنمی‌تـوانیم ازحکم‌هـای مربوط بـه همسایگی استفاده‌کنیم، زیـرا درایـن حالت، درنقطه‌های انتهایی ۱و۲، همسایگی‌هـایی وجود نـدارد کـه شامل هیچ نقطه‌ای کوچکتراز۱یا بزرگتراز۲ نباشند؛ دراین‌حالت، ۱و۲، خودعضوهایی

ازمجموعهٔ ما هستند.

نقطه‌های حدی

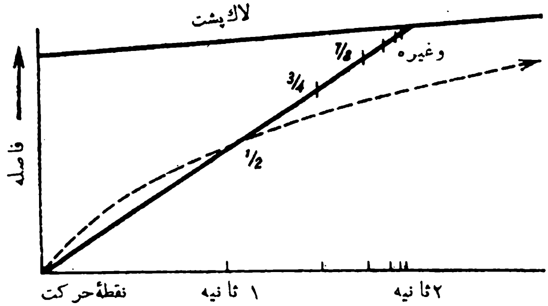
درتوپولوژی، «نقطهٔحدی»، آن‌چیزی‌نیست که‌ازروی‌نام‌گذاری آن، به‌نظرمی‌رسد. «نقطه حدی»، درحالت کلی، یك نقطهٔ مرزی‌نیست (اگرچه،گاهی هم، چنین است). مثلا، هرنقطه‌ای ازخط راست ــ که متناظربایك عدد حقیقی است ــ یك نقطهٔ حدی است. تعریف معمولی (ونه، تنهاتعریف) نقطهٔ حدی، شامل‌این‌مضمون‌است که، هرهمسایگی آن، شامل نقطهٔ دیگری ازهمان مجموعه باشد (درمثال ما، شامل نقطهٔ دیگری ازخط راست). تازمانی که با واژهٔ «حد»، به مفهوم خاصی که در این‌جا بـه کارمی‌رود، آشنا نباشیم، تعریف بالا به نظرمان عجیب می‌رسد.

مثالی‌اززندگی می‌آوریم، اگرچه ممکن است‌غیرعادی به‌نظر آید، وبه‌کمك آن، موضوع را روشن‌می‌کنیم. فرض‌کنید، روبه‌دیوار ایستاده‌اید ویك گام، به‌اندازهٔ نصف فاصلهٔ خود تادیوار، برمی‌دارید، گام دوم را به‌اندازهٔ نصف فاصلهٔ باقی مانده و، گام سوم را، بازهم‌به اندازهٔ نصف فاصله‌ای که بعداز گام دوم باقی مانده است برمی‌دارید و غیره. باچنین حرکتی، شماهرگزبه دیوارنمی‌رسید، زیرا، برای‌رسیدن به دیوار، باید بی‌نهایت‌گام بردارید. دراین مورد، دیوار، نقطهٔ حـدی حرکت شماست. فرض‌کنید، فاصلهٔ نخستین شما تا دیوار، برابر۲متر بـاشد، درایـن صورت، درگـام اول ۱ متر، و، سپس، بـه تـرتیب $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{16}$،... مترطی خواهیدکرد؛ تمامی فـاصله برابر ۲متراست،

باوجود این، عدد، به‌عنوان مجموعی از بی‌نهایت کسر، به‌دست‌می‌آید، بنابرشرط، همیشه نصف فاصلهٔ خود تادیوار را جلومی‌روید و، هرگز، تمامی آن را نمی‌پیمائید؛ ازاین دیدگاه، شما هرگز به‌دیوارنمی‌رسید. این موفقیعت، شبیه معمای زنون دربارهٔ آشیل تندپا ولاک‌پشت کندپا است: آیا آشیل می‌تواند به لاك پشت برسد؟

همهٔ مامی‌دانیم که آشیل به‌لاك پشت (علی‌رغم همهٔ تعریف‌ها) می‌رسد و، ازآن، می‌گذرد، زیرا او، درواقع امر، این دنبالهٔ نامتناهی گام‌ها را برنمی‌دارد. آشیل باسرعتی ثابت حرکت می‌کند: نمودار حرکت او، درشکل۱۷۴ داده‌شده است. این نمودار، یك خط راست است،زیرا آشیل سرعتی ثابت‌دارد و،این نتیجه‌علی‌رغم این که‌ازبی‌نهایت نقطه‌می‌گذرد، به‌دست‌می‌آید. اگر آشیل $\frac{1}{2}$ مترنخستین را در ۱ ثانیه می‌پیمود و، برای هرنیمی ازفاصلهٔ باقی ماندهٔ اوتالاك پشت، بازهم همین ۱ثانیه وقت راصرف می‌کرد، آن وقت، نمودارحرکت اوروی خط چین (خطی که انحنا دارد وبه سمت بالامی‌رود) می‌افتاد وهرگز به‌لاك پشت نمی‌رسید. اگرفاصله‌های زمانی را، که برای پیمودن فاصله‌های متناظرلازم دارد، باهم جمع کنیم، بازهم معلوم می‌شود که، کل‌زمان لازم برای رسیدن به‌لاك پشت، برابراست بادوبرابر زمانی که برای پیمودن نیمهٔ اولّ راه لازم است.

علت این که، دیواریا لاك‌پشت را، نقطهٔ حدی می‌خوانیم، این است که، باتوجه‌به‌روندی که برای حرکت‌انتخاب کرده‌ایم، می‌توانیم به‌آن‌ها «نزدیك شویم»، نه‌این که تامحل آن‌ها «بپریم». به زبان دیگر، می‌توانیم،تاآن‌جاکه‌بخواهیم، به‌آن‌ها نزدیك شویم (که‌باوجودی که،

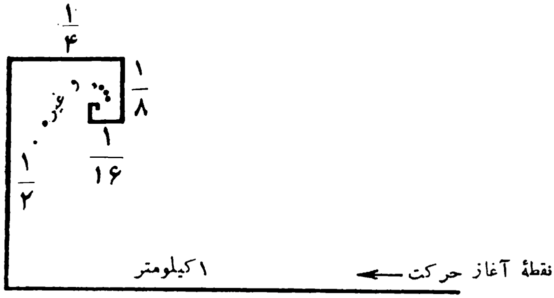


شكل ۱۷۴

دلخواه، به‌نظرمی‌آید، برای توپولوژی بسیارمهم است). برای این که نمونه‌ای از نقطهٔ حدی، درفضای دوبعدی، بدهیم، مساله‌ای طرح می‌کنیم که، برای حل آن، هیچ نیازی بـه ریاضیات عـالی نیست و، تنها، آشنایی باهندسهٔ مقدماتی و، ضمناً، وجودعقلی‌سلیم، کافی‌است.

شخصی روی صفحه ایستاده است: او ۱ کیلومتربه سمت غرب می‌رود، سپس $\frac{۱}{۲}$ کیلومتربه سمت‌شمال، بعد $\frac{۱}{۴}$ کیلومتربه شرق وسپس $\frac{۱}{۸}$ کیلومتربه‌سمت‌جنوب؛ دوباره $\frac{۱}{۱۶}$ کیلومتربه‌سمت غـرب مـی‌رود و غیره. این شخص، هربار، درست بـه زاویهٔ قائمه می‌پیچد و، درهـر سمت، نیمی‌ازفاصلهٔ سمت قبلی راطی‌می‌کند، به‌نحوی که یك مارپیچ بازاویه‌های قائمه به‌دست آید (شکل ۱۷۵ را ببینید).

مسیراو درکجا تمام می‌شود؟ به‌سادگی می‌توان متوجه شدکه، این شخص، روی هم ۲ کیلومتر راه خواهد رفت، به نحوی که اگربا سرعت ثابتی‌حرکت می‌کرد، به‌محل موعود می‌رسید. آیا، برای حل مساله، می‌توان، تنها بااستفاده ازپرگاروخط‌کش، مقصد را پیداکرد؟ پاسخ رادرضمیمهٔ VI ببینید.



شکل ۱۷۵

نوع دیگری از نقطه حدی را مطرح می‌کنیم (که در آن، نقش اصلی به عهدهٔ زمان است و نه فضا، زیرا درمورد آن، جای نقطه در فضا، اهمیتی ندارد)؛ این نقطه، عبارت است ازلحظهٔ دقیق نجات شما، وقتی کشتی شما در دریا دچار حادثه شده ودرحال غرق شدن است. کشتی‌شما مرتباً پایین‌ترمی‌رود، آیانجات دهندگان «به‌موقع» می‌رسند؟ این«لحظه»را، می‌توان نقطهٔ حدی دانست، ولی‌اگرشما دریک کشتی، باخیال‌آسوده، نشسته باشید، دیگرنمی‌توان این «لحظه»را، نقطهٔ حدی نامید. همه چیز، به‌مضمون ومفاد درونی مطلب مربوط می‌شود: اگر عدد۲ را، به‌عنوان یکی‌ازعددهای درست‌درنظربگیریم، یک نقطه‌حدی نیست، ولی‌اگرآن‌رابه‌عنوان‌مجموع‌رشته $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+...$ ویابه‌عنوان یکی ازعددهای حقیقی، که مثلاً بین ۱— و۳+ قراردارد، به‌حساب آوریم، آن وقت، یک نقطهٔ حدی خواهد بود.

۱۱
مجموعه‌ها

برتراند راسل، زمانی گفته بود: از ویژگی‌های ریاضیات این است که، هرگز نمی‌دانیم دربارهٔ چه چیز خاصی صحبت می‌کنیم. معنای این مطلب این است که، ریاضی‌دانان، نه به‌حقیقت، بلکه به بی‌تناقضی علاقه‌مندند. آن‌ها درجست و جوی قانون‌مندهایی نیستند که بتوان، از آن‌ها، درجهان واقعی استفاده کرد. بلکه به‌دنبال چیزهایی هستند که ازنظرمنطقی درست باشند و اگر آن‌هارا به‌عنوان حقیقت‌هایی که برای خودشان وجود دارند مورد بررسی‌قرار دهیم بتوان به‌وجود قانون‌هایی پی‌برد.

مدت‌ها گمان می‌کردند که هندسهٔ اقلیدسی را می‌توان در مورد فضائی‌که ما را احاطه‌کرده است، به‌کار برد، ولی باآغاز آینشتین، واقعیت امر روشن شد و، بااستفاده ازتلسکوپ‌های قوی، معلوم شد که فضای ما ــ اگربه‌بخش نسبتاً بزرگی از کیهان توجه داشته باشیم ــ به‌هیچ‌وجه اقلیدسی نیست. ولی، فضای ما به‌هرصورتی باشد، اعم از این که هندسهٔ اقلیدسی درآن‌کاربرد داشته باشد یا نه، به‌خود هندسهٔ اقلیدسی مربوط نمی‌شود و آن را منطقی‌تر یا متناقض‌تر نمی‌کند؛

ریاضی‌دان به‌جنبه‌های کاربرد یك نظریه‌کاری ندارد، آن چه مورد نظر اوست، بی‌تناقضی درونی ومنطقی‌بودن این‌نظریه است. باهمهٔ این‌ها، وقتی‌که ریاضی‌دان کاربردی برای نظریهٔ خود پیدا کند ، خوشحال می‌شود واز آن لذت می‌برد.

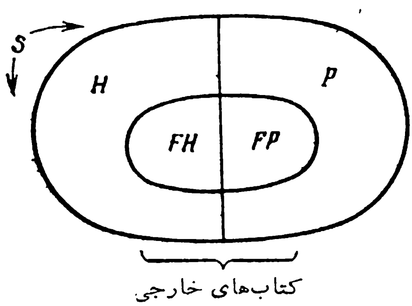
وقتی که ریاضی‌دان ، مثلاً ، ازبی‌نهایت صحبت می کند،کاری به این ندارد که، در واقع، چه چیزی را مورد بررسی قرار داده است و، ضمن بررسی خود، نیازی به‌این پیدا نمی کند که یك بی‌نهایت «واقعی» را ـ اگر وجود داشته باشد ـ درنظر بگیرد. به‌همین ترتیب، وقتی که درهندسه از زاویهٔ قائمه صحبت می کند، نمی‌خواهد بگوید که زاویهٔ قائمهٔ مطلق، درجایی در واقعیت، وجود دارد: اوبه‌طورساده، از زاویهٔ قائمه ایده‌آل صحبت می‌کند تابتواند نتیجه‌ای منطقی از آن به‌دست آورد. در ریاضیات، بی‌نهایت‌های مختلفی وجود دارد و ما ، درموقعیت‌های متفاوتی، دربارهٔ آن صحبت می‌کنیم. در ریاضیات، رابطه‌ها، بیشتر از موضوع‌هایی که به‌وسیله این رابطه‌ها به‌هم بستگی پیداکرده‌اند، اهمیت دارد. متخصصان توپولوژی هم، مثل دیگر ریاضی‌دانان، سرانجام، خود را از هر گونه درك محسوس و ملموس جداکردند: متخصصان توپولوژی، درابتدا، با چیزهای ملموسی سروکار داشتند که به‌هم مربوط بودند، ولی روز به‌روز بیشتر به‌این سمت کشانده شدند که، چگونه می‌توانند خودرا ازقید چنین چیزهایی که محسوس و ملموس بودند (و موضوع‌های اولیهٔ بحث را تشکیل می‌دادند)، به‌طور کامل، خلاص کنند. و درهمین مسیر بود که ریاضی‌دانان، توانستند به‌بهترین نتیجه‌گیری‌ها برسند.

همان طور که قبلاً هم گفته‌ایم، متخصصان توپولوژی، به

ویژ‌گی‌های پایا، علاقهٔ خاصی دارند: ولی بهترین روش نمایش چیزها به‌صورت کلی خود و، درعین حال، حفظ بستگی‌های بین آن‌ها (که امکان صحبت دربارهٔ پایاهای توپولوژیك را فراهم کند)، مطالعهٔ این چیزها، به‌صورت مجموعه‌هاست.ما هم اکنون نشان خواهیم داد که، چگونه‌می‌توان بامجموعه‌ها عمل کرد، بدون این که ازماهیت‌عضوهای آن‌ها، اطلاعی داشته باشیم.

نمودار وِن

اجازه بدهید، ازمجموعهٔ کتاب‌های قفسه آغاز کنیم؛ بعضی از آن‌ها با جلد محکم صحافی شده‌اند و بقیه ، جلد ساده دارند، در این حالت، به‌ردیف و اندازهٔ کتاب‌ها،کاری نداریم، ولی می‌دانیم دربارهٔ چه چیزی صحبت می کنیم: گفت و گوی ما، نه‌دربارهٔ همهٔ کتاب‌های جهان، بلکه تنها دربارهٔ کتاب‌هائی ازمجموعهٔ S است. بعضی‌از آن‌ها، جلد ساده دارند و زیرمجموعهٔ P از مجموعهٔ S را تشکیل می‌دهند. تعریف عادی می گوید: P وقتی زیرمجموعهٔ S است که، هرعضوی‌از P ، ضمناً، عضوی از S باشد (درمثال ما، این عضوها،کتاب هستند).



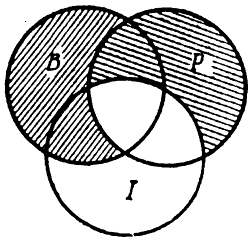
شکل ۱۷۶

این حقیقت را، به‌طور ساده، این طور می‌نویسند: $P \subset S$.

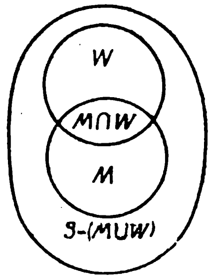
کتاب‌های باجلد محکم هم، یك زیرمجموعه‌را تشکیل می‌دهند: $H \subset S$. بعضی از کتاب‌ها، خارجی‌اند و درهردونوع از زیرمجموعه‌های ما، یعنی P و H، پیدا می‌شوند. درشکل ۱۷۶، نمودار مربوط را رسم کرده‌ایم؛ در آن‌جا، مجموعه و زیرمجموعه‌ها، به‌صورت حوزه‌هایی‌مشخص‌شده‌اند، ولی‌وضع قرارگرفتن این زیرمجموعه‌ها و تعداد نسبی آن‌ها، دراین نمودار، مشخص نمی‌شود. روشن است که یك کتاب، نمی‌تواند هم با جلد ساده باشد و هم با جلدمحکم و، بنابراین این دو مجموعه (هرزیرمجموعه را می‌توان، به عنوان یك مجموعهٔ مستقل در نظر گرفت)، یکدیگر را قطع نمی‌کنند (باهم «اشتراکی» ندارند). این دو مجموعه را می‌توان از هم تمیز داد و به‌هم مربوط نیستند. درشکل ۱۷۶ می‌بینیم که، حوزهٔ S، به‌دوحوزهٔ H و P تقسیم شده است و هر دوی این زیرمجموعه‌ها، شامل بیضی کوچکی هستند که معرف کتاب‌های خارجی است و، درنتیجه، دو زیرمجموعه برای مجموعه‌های Hو P تشکیل می‌دهند. FH و FP.

می‌توانیم نمودار دیگری رسم کنیم و، در آن نشان دهیم، چه کسی کدام کتاب‌ها را خوانده است. برای این منظور، از عادی‌ترین نمودار ون استفاده می‌کنیم (شکل ۱۷۷). M نمایندهٔ کتاب‌هایی که شوهر خوانده است و W، کتاب‌هایی که به وسیلهٔ زن خوانده شده است. بخش مشترك این دوحوزه، معرف کتاب‌هایی که مورد استفادهٔ هردو نفر، زن و شوهر، قرار گرفته است؛ این بخش، معرف اشتراك M و W است که به‌صورت $W \cap M$ نشان داده می‌شود. کتاب‌های خوانده نشده، متناظر با بخشی از S است که دربیرون M وبیرون W

قرار گرفته است. همهٔ کتاب‌های خوانده شده، مجموع (یا اجتماع) مجموعه‌های M و W را تشکیل می‌دهد. این اجتماع را ، به صورت $M \cup W$ نشان می‌دهند که شامل بخش مشترك $M \cap W$ هم می‌شود. اجتماع دو مجموعه، شامل عضوهایی است که دست کم ، به یکی از دومجموعه تعلق داشته باشند (یعنی یا متعلق به‌یکی از دومجموعه‌باشد و یا متعلق به هردوی آن‌ها). به این ترتیب، کتاب‌های خوانده‌نشده را



شکل ۱۷۸



شکل ۱۷۷

می‌تـوان به صورت $S-(M \cup W)$ نشان داد. این حقیقت را که دو مجموعهٔ H و P ، درشکل ۱۷۶، اشتراکی ندارند، می‌توان به‌صورت $H \cap P = \circ$ نشان داد.

از نمودار ون می‌توان، برای روشن کردن بعضی از رابطه‌های منطقی استفاده کـرد. مثلاً فرض کنید بدانیم که: ۱) همهٔ کتاب‌هـای ما چاپی‌اند، ۲) درهـر کتاب چاپی، تنها از رنگ سیاه استفـاده می‌شود؛ دراین صورت نتیجه می‌گیریم کـه : ۳) درهمهٔ کتاب‌ها از رنگ سیاه استفاده شده است. درشکل ۱۷۸، دایرهٔ B نمایندهٔ همهٔ کتاب‌های ما ، دایرهٔ P نمایندهٔ همهٔ کتاب‌های چاپی و I ، نمایندهٔ همهٔ کتاب‌هایی است که، در آن‌ها، تنها از رنگ سیاه استفاده شده است. از آن جاکـه ما،

کتاب‌های غیرچاپی نداریم، تنها اشتراك $B\cap P$ را بررسی می کنیم و بخش دیگر B راکنار می گذاریم. سپس، بخشی از P را که در $P\cap I$ نیست،کنار می‌گذاریم، زیرا همهٔ کتاب‌ها تنها با رنگ سیاه چاپ شده‌اند. اکنون می‌بینیم که، از B ، تنها $B\cap I$ باقی مانده است، یعنی درهمهٔ کتاب‌ها، تنها از رنگ سیاه استفاده شده‌است. همهٔ‌این‌ها، به‌همان اندازهٔ درستی خود، ساده‌هم هستند؛ ولی اگربخواهیم، همین تلاش را، درمورد چهار مجموعه‌ای انجام دهیم که هیچ‌کدام از آن‌ها موجب حذف دیگران نشود (یعنی مثلاً ازنوع کتاب‌های خوانده‌شده وخوانده نشده نباشد)، آن وقت، کار به‌این سادگی نخواهد بود. در واقع، اگر بخواهیم نمودار ون را، برای چهار مجموعه، رسم کنیم، به‌نحوی‌که همهٔ ترکیب‌های ممکن روی آن نشان داده شده باشد (یعنی، بخش‌هایی‌را مشخص کرده باشد که، درعین‌حال، متعلق به‌یك، دو، سه یا چهار مجموعه باشند) ، آن وقت، با یك معمای کوچك سر و کار خواهیم داشت. ضمناً، بهتر است، ابتدا، همهٔ ترکیب‌های ممکن را بنویسیم: تعداد آن‌ها، روی هم، ۱۵ می‌شود (تعداد این‌گونه ترکیب‌ها ، همیشه، یك واحد از ۲^n کمتر است،که در آن، n عبارت است ازتعداد مجموعه‌ها، یعنی تعداد ترکیب‌ها برابر $۲^n - ۱$ می‌شود واین، البته، به‌شرطی‌است که حالتی‌را که در آن، هیچ‌یك‌ازمجموعه‌ها وجود ندارند، درنظر نگیریم، درحالت اخیر، تعداد همهٔ ترکیب‌ها، برابر ۲^n می‌شود). یادآوری این مطلب لازم است که، هیچ ضرورتی ندارد، برای نمایش مجموعه‌ها، از دایره استفاده کنیم : برای نمایش مجموعه، می‌توان‌ازهرشکل بسته‌ای، ومثلاً بیضی کشیده، استفاده کرد. پاسخ درپایان همین بخش داده شده است.

زیرمجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد (مثلاً، مجموعهٔ کتاب غیرچاپی)، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود. متخصصان توپولوژی، به‌این جهت، چنین مجموعه‌ای را وارد کرده‌اند که، دربعضی موردها، به‌آن کمك می‌کند: اگر همه‌جا و همیشه بخواهیم از مجموعهٔ تهی استفاده کنیم، ممکن است دشواری‌هایی ایجاد کند، ولی در جبر توپولوزی، می‌تواند عنصر کاملاً مفیدی باشد. مثالی می‌آوریم که، در آن، مجموعهٔ تهی معنا پیدا می‌کند و ضمناً، کاملاً جبری هم نیست. مسابقهٔ مشهور بیست سئوالی را درنظر می‌گیریم. دراین مسابقه، یکی از شرکت‌کنندگان، چیزی یا موضوعی را در نظر می‌گیرید و دومی می‌تواند بیست سئوال از او بکند و، دربرابر هرسئوال خود، تنها پاسخ «بله» یا «نه» را دریافت می‌کند، بعد از بیست پرسش، باید بتواند چیز یا موضوعی راکه طرف او فکر کرده است، کشف کند. فرض کنید، شرکت‌کنندهٔ اول، به «سوراخ نان شیرینی حلقه‌ای» فکر کرده باشد، آن وقت، اگر شرکت‌کنندهٔ دوم بپرسد: «آیا جنس آن غیرمعدنی است؟»، نمی‌توان پاسخ «بله» یا «نه» به‌آن داد، زیرا پاسخ را هم می‌توان به‌فضای داخلی سوراخ نسبت داد (که مثلاً هواست) وهم‌می‌توان تصورکرد که شکل‌سوراخ، به‌خاطرحلقهٔ دورآن به‌وجود آمده است که ازماده‌ای ساخته شده است. بنابراین، احتمالاً، بهترین پاسخ این باشد که مجموعه‌ای تهی از «ذره‌های نان شیرینی حلقه‌ای» است. ولی البته، درمسابقهٔ بیست سئوالی، چنین پاسخی مجازنیست.

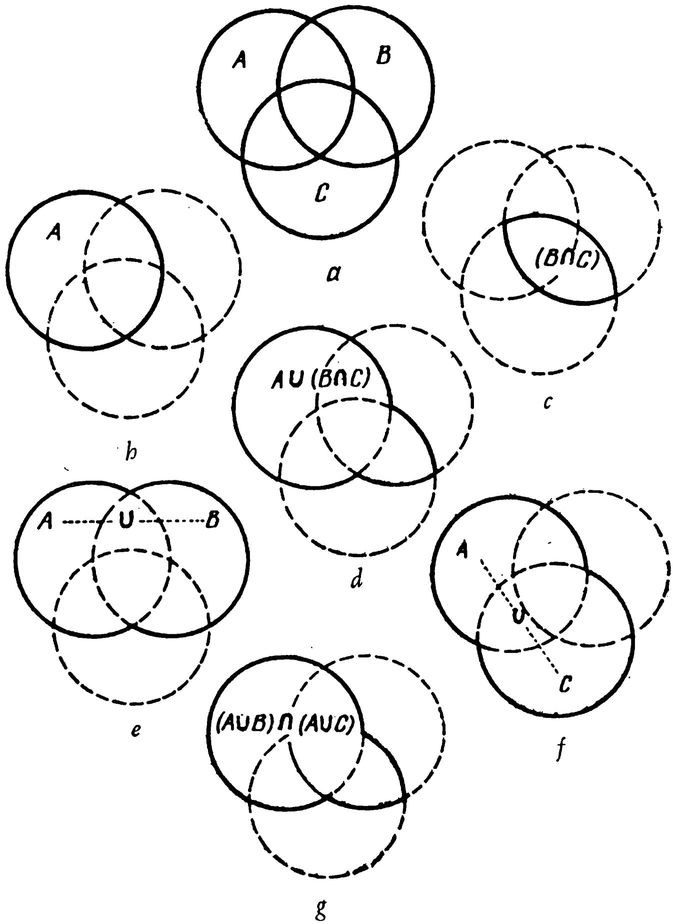
قضیه‌های ظریفی، با شرکت تنها سه مجموعه، وجود دارند که چندان قابل فهم نیستند. مثلاً، این رابطه را درنظر می‌گیریم:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

معنای این رابطه چنین است: «اجتماع A بااشتراك C و B، برابر است بااشتراك اجتماع A و B و اجتماع A و C». این حکم را ، با چنین تنظیمی، به‌سختی می‌توان فهمید. به‌زبان عادی، می‌توانست به‌این‌معنی باشد:

«گروهی از مردم که موهای ژولیده یا بور مجعد دارند (یا هم این‌هاوهم آن‌هاباهم)، از همهٔ کسانی تشکیل شده‌است که، به‌طور هم‌زمان، در گروه شامل ژولیده‌ها یا مجعدها (یاهم این و هم آن باهم) و گروه شامل‌ژولیده‌ها یا بورها (یاهم‌این وهم آن باهم) واقع‌باشند». می‌بینیم که، برای توضیح منظورخود، گاهی ترجیح می‌دهیم از واژهٔ «یا» استفاده کنیم و گاهی از واژهٔ «و». آیا، این وضع، مارا به‌پیچ و خم دستور زبان نمی‌اندازد؟ اگر تمامی دقت خود را روی معنای درست جملهٔ بالامتمرکز کنیم، ممکن است، به‌نوعی حالت هیپنوتیزمی دچار شویم. ولی، اکنون، به شکل ۱۷۹ توجه کنید.

به‌کمك نمودار a، همه چیز روشن می‌شود. در حالت b، تمام دایرهٔ A (افرادباموهای ژولیده) دراختیار ماست. در حالت c، اشتراك $B\cap C$ نشان داده شده است (بورهای مجعد، و نه B یا C). در حالت d ، اجتماع این مجموعه‌ها را به دست آورده‌ایم : $A\cup(B\cap C)$. حالابخش سمت راست برابری خود را مورد رسیدگی قرارمی‌دهیم: درحالت e، اجتماع A و B (یعنی گروهی ازمردم که موهای ژولیده یا بور یا هردو را دارند) و درحالت f ، اجتماع A یا C (یعنی گروهی از مردم که موهای ژولیده یا مجعد یا هردو را دارند) نشان داده شده است. در حالت g ، شکل‌های e و f را روی هم گذاشته‌ایم تا فصل مشترك آن‌ها را پیدا کنیم وقانع شویم که همان نتیجهٔ حالت d به‌دست

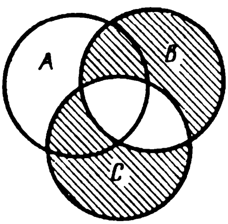


شکل ۱۷۹

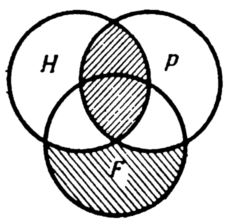
می‌آید. و این، همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

وقتی که با نمودارهای ون کار می‌کنیم، گاهی بهتر است از روش حذف بخش‌های غیر لازم استفاده کنیم (مثل حالتی که در شکل ۱۷۸ داشتیم). شکل ۱۷۶ را می‌توانستیم به‌صورت شکل ۱۸۰ نشان دهیم، که در آن، فصل مشترك کتاب‌های با جلد محکم و کتاب‌های

با جلد ساده را حذف کرده‌ایم ، زیرا حتی یك کتاب هم وجود ندارد که، درعین حال، هم جلدمحکم داشته‌باشد و هم جلدساده: $H \cap P = 0$. سپس، بخشی از کتاب‌های خارجی را، که بیرون H و P قرار دارند، حذف می‌کنیم، زیرا باکتابی سروکار نداریم که بدون جلد باشد. $F - (H \cup P) = 0$. ولی ، این شکل ، چیز تازه‌ای ، که قبلاً از آن بی‌اطلاع باشیم، به ما نمی‌دهد. برعکس، درحالتی که شکل ۱۷۹ را تعقیب می‌کردیم، اگر جمله‌های اجتماع را به‌ردیف عکس می‌نوشتیم: $(B \cap C) \cup A$ ، روش حذف می‌توانست دشواری‌هایی به‌وجود آورد. ممکن بود، از بدشانسی خود، ابتدا، بخش‌هایی از B و C را حذف کنیم که اشتراکی ندارند (شکل ۱۸۱) و بعد ، نتیجه را به A (تمامی A) اضافه کنیم ؛ در این جا ، ناچار می‌شدیم، قسمتی از A راکه قبلاً حذف کرده بودیم، بازسازی کنیم. به‌همین‌مناسبت، استفاده از خط‌های



شکل ۱۸۱



شکل ۱۸۰

کلفت‌تر یا، دست کم، استفاده ازشکل‌های متوالی، گاهی، مفهوم‌تر از روش حذف است.

حالا، همهٔ تعریف‌ها را دریك جا جمع می‌کنیم:

۱. زیرمجموعهٔ‌مجموعهٔ S، به‌مجموعه‌ای گفته می‌شود که هرعضو آن متعلق به S باشد : $A \subset S$. (وقتی که می‌گوییم ، p عضوی است متعلق به‌مجموعهٔ S ، می‌نویسیم: $p \in S$.)

۲. اجتماع دومجموعهٔ A و B ، به‌مجموعه‌ای گفته می‌شود که، هرعضو آن‌دست کم، متعلق به‌یکی ازدومجموعهٔ A وB باشد: $A \cup B$.

۳. اشتراك مجموعه‌های A و B ، به‌مجموعه‌ای گفته می‌شود که، هرعضو آن، هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد: $A \cap B$.

۴. متمم زیرمجموعهٔ A از مجموعهٔ S (در S) ، به مجموعه‌ای گفته می‌شود که شامل عضوهایی ازمجموعهٔ S باشد ، که به A تعلق ندارند: $S \setminus A$.

مفهوم متمم، درتوپولوژی، نقشی اساسی دارد، همین حالاهم، می‌توانیم از آن درباره «دیسك» استفاده کنیم: اگرقسمتی از دیسك را که روی سطح قرار دارد، به‌رنگ سیاه درآوریم، آن‌وقت، متمم آن، بدون رنگ سیاه، باقی می‌ماند. متمم مجموعهٔ S را در فضای U ، می‌توان به‌صورت $U \setminus S$ نوشت. این مفهوم، ضمن کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها درتوپولوژی، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند.

درنظریهٔ مجموعه‌ها هم، مثل هندسه، قضیه‌های زیادی وجود دارد (که همیشه هم ، واضح نیستند و حتی گاهی غیر واقعی به نظر می‌آیند)، که به‌ما کمك می‌کنند تااین نظریه را به‌صورتی به‌هم‌پیوسته وقابل زیست درك کنیم. چندتا از این قضیه‌ها را در این جا می‌آوریم و ازخواننده می‌خواهیم، آن‌ها را، به کمك نمودار ون ثابت کند. (به خواننده توصیه می‌کنیم، تا زمانی که به‌علامت‌ها عادت نکرده است، آن‌ها را روی یك کاغذ بنویسید و دائماً جلو خود داشته باشد: $\subset$ برای زیرمجموعه ، $\in$ برای عضویت، $\cup$ برای اجتماع، $\cap$ برای اشتراك و $A \setminus B$ به‌معنای متمم A در B.)

۱. اگر $A \subset B$ ، آن گاه $A \cup B = B$.

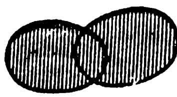
۲. اگر $A\subset B$ ، آن‌گاه $A\cap B=A$.

۳. اگر $A\subset B$ و $B\subset C$ ، آن‌گاه $A\subset C$.

۴. $(A\cap B)\cap C=A\cap(A\cap C)$.

۵. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

این نکته را هم یادآوری می‌کنیم که، این نمادها، تنهانمادهای ممکن نیستند و، در کتاب‌های مختلف، ممکن‌است به‌نمادهای‌مختلف برخورد کنید. ما بعضی از آن‌ها را در این‌جا داده‌ایم



یا

بخش‌های هاشورخورده جدا شده‌اند

اجتماع

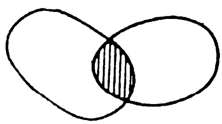
مجموع

$\cup$ $+$ $\oplus$ $\vee$

اشتراك

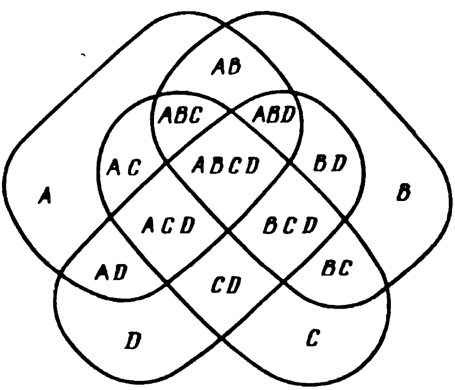
حاصل‌ضرب

فصل‌مشترك



$\cap$ $\cdot$ $\odot$ $\wedge$ AB (به‌طور ساده پشت‌هم نوشته شده‌اند)

نماد عضویت مجموعه ، یعنی $\in$ ، اگر کوچك نوشته شود ،



شکل ۱۸۲

ممکن است با حرف یونانی ε (اپسیلن) اشتباه شود.

*

پاسخ معمای مربوط به‌چهارمجموعه، درشکل ۱۸۲ داده شده است. سعی کنید، خودتان، همین مطلب را دربارهٔ پنج مجموعه‌روشن کنید. پاسخ درضمیمه VII داده شده است.

مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته

تااین‌جا، دربارهٔ مجموعهٔ آدم‌ها یاکتاب‌ها صحبت‌کردیم، ولی در توپولـوژی ، معمولاً سخن از مجموعهٔ نقطه‌هاست. تا زمانی‌که منظور ازاین‌نقطه‌ها، همان‌چیزی‌است‌که ازهندسه می‌دانیم، متخصصان توپولوژی، فضایی راکه این‌نقطه‌ها درآن قرار دارند، فضای‌اقلیدسی می‌نامند. مثلاً صفحه، خود به خود، یك فضای دو بعدی اقلیدسی را تشکیل می‌دهد (که اغلب، آن را به صورت E^2 نشان می‌دهند). خط راست، عبارت است از E^1. به‌جز این‌ها، با E^3، E^4 وغیره‌هم‌سروکار داریم. فضاهایی کـه می‌خـواهیم دربارهٔ آن‌ها صحبت‌کنیم، فضاهـای اقلیدسی هستندکه، ضمناً، فضاهای متریك هم از آب درمی‌آیند. قبل ازآن‌که به‌روشن‌کردن مفهوم اخیر بپردازیم، به یـاد می‌آوریم‌که ما ، همیشه، علاقه‌مندبه‌حداکثرتعمیم هستیم. بنابراین، امیدواریم به‌رابطه‌ها یا قضیه‌هایی برسیم‌که درهرفضایی قابلیت‌کاربرد داشته باشند، بدون‌این‌که به‌بعدهای فضا کار داشته باشیم و یا حتی به‌نقطه‌های اقلیدسی؛ بلکه تنها با موضوع‌هـای نامعینی سروکار داشته باشیم‌کـه دربارهٔ آن‌هـا بتوان رابطه‌ها یاقضیه‌های مفروض را به‌کاربرد. این‌گونه روش‌تعمیم، از ویژگی‌های ریاضیات است: شش جفت برابر است بایك دوجین،

بدون‌این که فکر کنیم، دربارهٔ آپارتمان صحبت می کنیم یاروزهای ماه.

وقتی که فضای متری وارد توپولوژی شود، به‌معنای آن است که، نقطه‌ها، به‌ردیف معینی قرار گرفته‌اند، به‌نحوی که اگر فاصلهٔ بین نقطهٔ a و نقطهٔ b برابر صفر باشد، آن وقت $a = b$. به همین ترتیب، مجموع فاصله‌های از a تا b و از b تا c ، بزرگتر یا برابرفاصلهٔ از a تا c باشد (شکل ۱۸۳؛ برابری، تنها برای حالتی است که داشته‌باشیم: $a = b$ یا $b = c$). همهٔ‌این‌ها ساده است، ولی توجه کنید که، دراین‌جا،

شکل ۱۸۳

هیچ صحبتی ازاین‌نیست که چقدربزرگتراست: تنها می‌گوییم بزرگتر یا برابر یاکوچکتر است. معمولاً، درفضای متری، مفهوم فاصله وارد می‌شود، ولی درتوپولوژی کوشش می‌شود تا خود را ازقیدآن آزاد کنند. این وضع، به‌معنای آن نیست که قاعده‌های مربوط به‌فضای متری. درتوپولوژی خراب می‌شود، بلکه تنها به این معناست که، در هرحالت خاص، از روش‌های خاصی در مورد آن استفاده می‌شود. وقتی که این روش‌ها، درمورد فضایی به‌کار می‌روند که به‌فاصله‌ها توجهی ندارد، آن وقت، مسألهٔ مربوط به‌باز یا بسته بودن، اهمیت درجه اول پیدا می کند. این ویژگی، به‌این مناسبت، در درجهٔ اول قرار می گیرد که با هرتغییر شکلی ثابت می‌ماند.

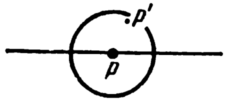
فضایی را درنظرمی گیریم که ازنقطه‌های یك خط راست‌تشکیل شده باشد، آن وقت ، ساده‌ترین نمونهٔ یك مجموعهٔ باز، عبارت است از «همهٔ نقطه‌های متناظر باعددهای بزرگتر از ۰ وکوچکتر از ۱»؛ به

همین ترتیب، «همهٔ نقطه‌های متناظر با عددهایی که از ٥ کوچکتر و از ١ بزرگتر نیستند»، یك مجموعهٔ بسته را تشکیل می‌دهند. ولـی ما، تعریف‌های بهتری هم می‌توانیم بدهیم.

دربارهٔ «بازبودن» مجموعه می‌توانیم، کم و بیش، همان چیزی را که قبلاً گفته‌ایم، تکـرار کنیم: مجموعه‌ای از نقطه‌ها را بازگویند، وقتی که، برای هر نقطهٔ آن، یك همسایگی وجود داشته باشد، به‌نحوی که این همسایگی، به‌طورکامل جزیی ازمجموعهٔ ما باشد. اگر آن چه را که قبلاً دربارهٔ همسایگی گفته‌ایم، به‌یاد آوریم، ایـن تعریف را به خوبی و به‌سادگـی می‌فهمیم. اگر مجموعهٔ ما در «جهانی» یك بعدی واقع باشد (خط راست نامتناهی)، آن‌وقت، مجموعهٔبازعبارت است ازیك فاصله، بدون دو انتهای آن (فاصلهٔ باز). (دراین‌حالت،نقطه‌های انتهایی را، نقطه‌های مرزی هم می‌گویند.)

اما دربارهٔ «بسته بودن»، نمی‌توان به‌سادگی و ازعکس تعریف قبلی استفاده کرد. می‌توان گفت: مجموعه‌ای را بسته گویندکـه شامل همهٔ نقطه‌های حدی خود باشد. این تعریف، عقلانـی به نظر می‌آید، ولی به‌چه‌مناسبت، نقطه‌های‌حدی، ناگهان، ظاهرشده‌اند؟ درتعریف‌ها، بایدبرواژهٔ «همه»تکیه کرد. درمثال‌قبل‌هم، مجموعهٔباز، تنهاازنقطه‌های حدی تشکیل می‌شد، منتهی بدون حضور نقطه‌هـای انتهایی؛ این دو نقطهٔ انتهایی، باوجودی که (طبق تعریف مجموعهٔ باز) جزو مجموعهٔ مفروض نیستند، نقطه‌های حدی آن محسوب می‌شوند، زیرا (همان طورکـه قبلاً دیدیم)، نقطه‌های مجموعه را می‌توان، تاآن‌جاکه لازم باشد، به‌این نقطه‌های انتهایی نزدیك گرفت. اکنون اگر این دونقطهٔ انتهایی‌را به‌مجموعهٔخود اضافه کنیم، مجموعهٔتازه شامل همهٔنقطه‌های

حدی خواهد شد و، بنابراین، یك مجموعهٔ بسته خواهد بود.



شکل ۱۸۴

اگــر درتعریف، به‌جای نقطه‌هــای حدی، برنقطه‌های انتهایی (مرزی) تکیه می‌کردیم، آن‌وقت، درك موقعیت زیر برای ما مشکل بود. فــرض کنیم، فاصلهٔ بدون نقطه‌های انتهایی ما، به جـای فضای یك بعدی، بریك صفحه واقـع باشد. دراین صورت، روشن است که حتی یکـــی از نقطه‌های آن، دارای همسایگی کــه تماماً در داخل مجموعهٔ مفروض باشد، نیست، زیرا دراین جا، همسایگی، نه یك قطعه از خط راست، بلکه یك حوزهٔ دوبعدی را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۸۴). این وضـع، به‌این مناسبت پیش می‌آید که گسترهٔ فضای ما، دوبعدی‌است و، حتی اگر مجموعهٔ ما یك بعدی باشد، همسایگی، شامل نقطه‌هایی ازنوع p′ است، کــه برخط راست مفروض قــرار ندارند. بنابراین، مجموعهٔ مفروض، مجموعه‌ای باز نیست. آیا درایــن صورت، حتماً مجموعه‌ای بسته است؟ باکمال شگفتی، نه! یــك مجموعهٔ دلخــواه، ناچار نیست، یا بازباشد و یا بسته. مجموعهٔ مفروض ماهم، نه‌این‌است و نه‌آن؛ وهمین مطلب، یکی از دلیل‌هایی است که ما را واداشت تا، درتعریف مجموعه‌های بسته، ازنقطه‌های حدی استفاده کنیم.

مجموعهٔ مثال اول، مجموعه‌ای بسته نبود، زیــرا شامل همهٔ نقطه‌های حــدی نمی‌شد (نقطه‌هــای انتهایی، حضور نداشتند)؛ اکنون به مجموعه‌ای برخورده‌ایم که نه باز است و نه‌بسته. آیا یك مجموعه می‌تواند، درعین‌حال، هم باز باشد و هم بسته؟ بله، می‌تواند: درمثال

قبلی، تمامی صفحه، چنین مجموعه‌ای بود. علت این است که صفحه نامتناهی است، در آن نقطه‌های انتهایی وجود ندارد، به‌نحوی که هیچ سخنی دربارهٔ داخل بودن آن‌ها در مجموعهٔ مفروض نمی‌توان گفت: بنابراین، یك مجموعهٔ باز است. ولی صفحه، شامل همهٔ نقطه‌ها، یعنی همهٔ نقطه‌های حدی است و، بنابراین، بسته است. همهٔ این‌ها، به غایت غیرعادی به‌نظر می‌آیند.

به‌این‌ترتیب، درحالت صفحه، می‌توانیم داشته باشیم:

۱) مجموعه‌های بسته، مثلاً یك حوزهٔ درونی (مثل مثلث)، زیرا، این حوزه، مرزی ندارد و ، هرنقطهٔ آن، دارای همسایگی است که به‌طور کامل متعلق به‌این حوزه است؛

۲) مجموعهٔ بسته ، مثل مثلث همراه با مرزهای آن؛

۳) مجموعه‌ای که هم‌باز باشد وهم بسته ، مثل هر فضای نامتناهی (باهر تعداد بعد)؛

۴) مجموعه‌ای که نه باز باشد و نه بسته ، مثل درون یك حوزهٔ دوبعدی درفضای سه بعدی (به‌همان دلیل فاصلهٔ باز درصفحه).

برای‌این که فهرست نمادها وتعریف‌ها را کامل کنیم، یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ باز را ، حوزه هم می‌گویند.

بااستفاده ازاندیشهٔ نمودار ون، ولی بدون رسم‌شکل، می‌توان ثابت کرد که، متمم مجموعهٔ باز S ، یك مجموعهٔ بسته است: $U \setminus S$ در U بسته‌است. در واقع، از آن جا که S شامل‌نقطه‌های مرزی‌نیست، همهٔ این نقطه‌ها در $U \setminus S$ قرار می‌گیرند، به‌همین دلیل، عکس این حکم هم درست است: متمم مجموعهٔ بسته ، یك مجموعهٔ باز است. خواننده می‌تواند، برای رضایت خاطر خود، ثابت کند که، اجتماع

دو مجموعهٔ باز ، یك مجموعهٔ باز و اشتراك دو مجموعهٔ بسته ، یك مجموعهٔ بسته است.

دربارهٔ مجموعهٔ باز ، می‌توان این مطلب را هم اضافه کرد که : اجتماع این مجموعه و مجموعهٔ نقطه‌های حدی آن ، بَستار آن نامیده می‌شود (و به‌صورت $\overline{S}$ نوشته می‌شود). بنابراین، $\overline{S}$ بسته است، زیرا شامل همهٔ نقطه‌های حدی است.

همسایگی‌ها را،(که‌دربالا باتعریف آنها آشنا شدیم)، می‌توان به عنوان مجموعه‌های باز در نظر گرفت (گر چه بعضی از متخصصان توپولوژی آن‌هارا بسته می‌دانند، ولی به‌علت دشواری بسیار، ما وارد این بحث نمی‌شویم). دیدگاه اول، تا حدی مفهوم‌تر است.

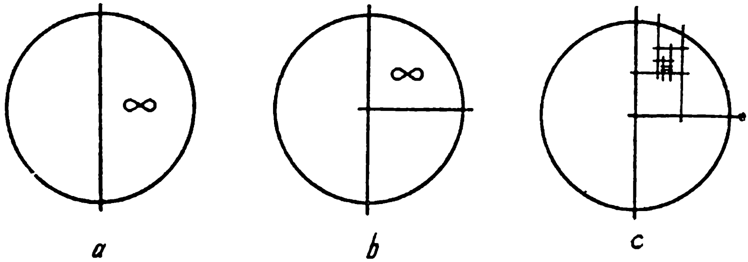
به‌مجموعه‌هایی‌برخورد داشتیم که،به‌طورکامل، از نقطه‌های‌حدی تشکیل شده بودند. اگربه مجموعه‌هایی برخورد کنیم کـه فاقد چنین نقطه‌هایی باشند یا ، دست کم، تنها از این نقطه‌ها تشکیل نشده باشند، وضع چگونه است؟ بایکی ازاین‌نوع مجموعه‌ها، قبلاً آشناشده‌ایم، اگرچه، درآن جا، نامی ازمجموعه نبردیـم: منظور نقطـه‌های متناظر با عددهای ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۸}$ ، ... ، روی خط راست اقلیدسی است. می‌توانستیم نقطه‌های نظیر ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، ... را انتخـاب کنیم، در این مجموعه هم، حتی یك نقطهٔ حدی ، به استثنای آخرین نقطهٔ ۰ ، وجود ندارد. در واقع، بـرای هرنقطه از این مجموعه، می‌تـوان یك همسایگی چنان کوچك درنظر گرفت، که شامل هیچ کدام از نقطه‌های مجموعه نباشد. نقطهٔ ۰ حدی است، زیرا دنبالـهٔ مفروض به‌سمت آن میل می کند، یعنی، جمله‌های این دنباله، به هراندازه که‌بخواهیم، به۰

نزدیك می‌شوند.

می‌توانیم از این‌هم جلوتر برویم و بگوییم که، اگرمجموعه از کسرهائی تشکیل شده باشد، که به‌سمت صفر میل می‌کنند، هیچ‌کدام ازنقطه‌هایی که متناظر بایك عدد حقیقی روی خط راست اقلیدسی باشند، نقطهٔ حدی مجموعهٔ مفروض نیستند (به‌جز ۰) چون نمی‌توانیم نزدیك‌ترین نقطه را به یکی از نقطه‌های مجموعهٔ مفروض نشان دهیم، بنابراین، نمی‌توانیم نقطه‌ای را نام ببریم که دارای همسایگی به‌اندازهٔ کافی کوچکی نباشد که شامل نقطه‌هائی ازمجموعه ما نشود. می‌دانیم که مطلب، کمی مبهم وپیچیده شد، ولی درعوض، غیرقابل انکار است.

درمجموعه‌ای که هم‌اکنون به‌یاد آوردیم، تنها یك نقطهٔ حدی وجود داشت. آیا نمی‌شود مجموعه‌ای را پیدا کرد که هیچ نقطهٔ حدی نداشته باشد؟ می‌توان. نمونهٔ آن، مجموعه‌ای است که از نقطه‌های متناظر با عددهای ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ...، $\frac{۱}{۱۰}$، روی خط‌راست اقلیدسی، تشکیل شده باشد. روشن است که، این مجموعه، نقطهٔ حدی ندارد. این که، هرمجموعهٔ نامتناهی دست کم دارای یك نقطهٔ حدی است (که البته، لازم نیست متعلق به‌خود مجموعه باشد)، به‌وسیلهٔ قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراسن تضمین می‌شود و، به‌طور شهودی، قابل درك است. مجموعهٔ خودرا، همچون‌مجموعه‌ای ازنقطه‌ها درنظر می‌گیریم که درحوزه‌ای (جایی، در درون آن) مستقر باشند. وضع استقرار آنها، می‌تواند کاملاً دلخواه باشد (مثلاً درمثال قبلی، تمامی «دم» نامتناهی آن، تنها در نزدیکی انتهای صفرمتمرکز شده است). از وسط حوزه، خط راست دلخواهی می‌گذرانیم (شکل ۱۵۸-a)؛

آن وقت ، دست کم ، در یك طرف این خط راست، و مثلاً درسمت راست آن ، بی‌نهایت نقطه از مجموعهٔ مفروض ، قرار می گیرد. بعد،



شکل ۱۸۵

این نیمهٔ حوزه رابا خط راست تازه‌ای نصف می کنیم (شکل۱۸۵-b) و دوباره همان پرسش را مطرح می کنیم؛ فرض کنید، اکنون، بی‌نهایت نقطه ازمجموعهٔ ما، دربخش بالایی قرار گیرد. این جریان را ادامه می‌دهیمو، هربار، بخش‌متناظرحوزه را نصف می کنیم (شکل۱۸۵-c) سرانجام، این بخش کوچك شده، به‌سمت نقطه‌ای کشیده می‌شود که، درآن، بی‌نهایت نقطه ازمجموعهٔ ما «جمع» شده است. و روشن‌است که، این نقطه، یك نقطهٔ حدی خواهد بود.

اگر نقطهٔ حدی (طبق ساختمانی که انجام می‌دهیم) در بیرون مجموعهٔ مفروض باشد، بازهم می‌توانیم آن راکشف کنیم. بدیهی‌است که، دراین حالت، نقطهٔ حدی درمرز مجموعهٔ مفروض قرار می گیرد (متعلق به‌بستار ان خواهد بود). مثلاً ، اگر درمثال فوق نقطهٔ حدی ٥ را داخل در مجموعه نکنیم، چنین وضعی حاصل می‌شود. از طرف دیگر، اگر مجموعهٔ نامتناهی مفروض، از نوع خط راست اقلیدسی باشد (مثلاً ، همهٔ عددهای حقیقی از ۱ تا ۲) و در همسایگی هر نقطهٔ آن، بی‌نهایت نقطهٔ دیگر وجود داشته باشد، آن وقت ، در هر گامی که

برای نصف کردن حوزه برمی‌داریم، می‌توانیم هر کدام از دونیمه را، به‌دلخواه، انتخاب کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ حدی، در هرجای مجموعهٔ ما به‌دست می‌آید (و این نتیجه، با این مطلب که، مجموعهٔ ما به‌طور کامل از نقطه‌های حدی تشکیل شده است، سازگار است).

این که کسی به‌ما نمی‌گوید که، در گام، کدام نیمه را باید انتخاب کرد، امر مهمی نیست: چنین نیمه‌ای وجود دارد و، وجود آن وجود نقطهٔ حدی را تضمین می‌کند.

یکی دیگر از ویژگی‌های جالب مجموعهٔ نامتناهی این است که می‌توان زیرمجموعه‌ای از آن را به‌نحوی انتخاب کرد که بین عضوهای خود مجموعه و زیرمجموعهٔ آن، تناظر یك به یك وجود داشته باشد، مثلاً می‌توانیم مجموعهٔ بی‌نهایت کتاب را درنظر بگیریم و، آن را، به ردیف ۱، ۲، ۳، ... شماره گذاری کنیم و، سپس، از بین آن‌ها، کتاب‌های با شماره‌های زوج را انتخاب کنیم؛ به این ترتیب، زیرمجموعهٔ E از مجموعهٔ همهٔ کتاب‌های B به‌دست می‌آید: $E \subset B$. اکنون کتاب‌های مجموعهٔ E را شماره گذاری می‌کنیم: اولین، دومین، سومین، ... بعد، کتاب‌هایی از E و B را، که دارای یك شماره هستند، کنارهم قرار می‌دهیم. البته، این نتیجه گیری، باعقل سلیم منافات دارد، به‌نظر می‌رسد که، کتاب‌های با شماره‌های زوج، کمترند از کل کتاب‌ها. ولی حقیقت، حقیقت است: بین همهٔ کتاب‌ها و کتاب‌های باشمارهٔ زوج، می‌توان تناظر یك به‌یك برقرار کرد، به‌نحوی که، به‌این مفهوم، تعداد عضوهای E و B (که برای هردو، بی‌نهایت است)، برابر می‌شود.

تبدیل‌ها

تبدیل، عبارت است از تناظر بین دو نوع از موضوع‌ها؛ به‌آن،

تابع هم می گویند. این اصطلاح، معنایی دو گانه دارد: می‌تواند به‌معنای خود روند تبدیـــل ، قانونیَ که این روند را هدایت می کند، باشد، و می‌تواند به‌معنی نتیجهٔ تبدیل یا آن چه که موضوع u ، سرآخر، به‌آن تبدیل می‌شود، باشد. درحالت اخیر، اصطلاح «تابع» مناسب‌تر به‌نظر می‌رسد. قبلاً، وقتی که دربارهٔ پایاها صحبت می کردیم ، یادآوری کردیم که ، آن‌ها ، ضمن تغییر شکل، ثابت می‌مانند.دراین جا، «تغییر شکل» ، همان «تبدیل» است.

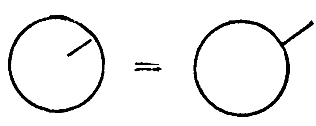
ولی ، این واژه، به‌معنای گسترده‌تری هم به‌کار می‌رود. وقتی که بین کتاب‌های با شمارهٔ زوج و همهٔ کتاب‌ها ، تناظر یك به یك برقـرار کـردیم، باز هم با یك تبدیل سروکار داشتیم. درایـن‌جا واژهٔ «تابع»، بیشتر به‌چیزی مربوط می‌شود که زوج‌های مرتب نـام دارد (در مثال مـا کتاب‌ها، ولی‌این‌زوج‌ها می‌توانند نقطه هم باشند). وقتی که می گوییم، عضوی از یـك مجموعه ، رو به سوی عضوی از مجموعهٔ دیگر دارد (یا با آن متناظر است)، یك تبدیل دربرابر ما قرار دارد.

به چنبره برمی گردیم ، که آن را خم و پیچ دادیم و به صورت فنجانی دسته‌دار درآوریم (تبدیل کردیم) می‌توانیم‌نقطه‌هـای چنبره را نشانه‌گذاری کنیم‌وازهر نقطهٔ آن، پیکانی به‌طرف‌نقطه متناظرش‌درفنجان رسم کنیم. دراین حالت، می‌توانیم از نقطه‌های فنجان، کـه در اطراف سوراخ دسته قرارگرفته‌اند. صحبت کنیم و، نتیجه بگیریم که آن‌ها، از نقطه‌هایی به‌دست آمده‌اند که دراطراف سوراخ چنبره بوده‌اند؛ ولـی بیش از این چیزی نمی‌توان گفت. مثلاً درایـن باره چیزی نمی‌توانیم بگوییم که، نقطه‌های حاشیهٔ بالایی فنجان، ازکدام بخش چنبره به‌دست آمده است.

این تناظر، درعین‌حال، هم کاملاً جدی است و هم کاملاً نامعین. مثلاً، وقتی کـه از هـم‌ارزی شکل ۱۸۶ــ a و شکل ۱۸۶ــ b صحبت می کنیم، تنهامی‌توانیم‌بگوییم که نقطه‌های p و 'p متناظر باچه‌نقطه‌هایی هستند. این‌نقطه‌ها را، درحالت b ، با f(p) و f(p') نشان داده‌ایم (نماد f به‌معنای تابع است). اگـر نقطهٔ دیگری روی شکل a انتخاب کنیم،

شکل ۱۸۶

نمی‌توانیم مشخص کنیم که نقطهٔ متناظر آن، روی شکل b، کدام است، اگرچه این را می‌توانیم بگوییم که ، هیچ نقطه‌ای از منحنی بستهٔ شکل a ، متناظـر با هیچ نقطه‌ای از «جـوانه» شکل b نیست. ولی، در این تبدیل، چیزهایی ثابت مانده‌اند: نقطه‌ای که «جوانه» به‌منحنی‌بسته وصل شده‌است، وانتهای آزاد «جوانه»؛ درست به‌همین‌علت‌بود که، توانستیم بفهمیم، نقطه‌های p و 'p به‌کجا منتقل می‌شوند.



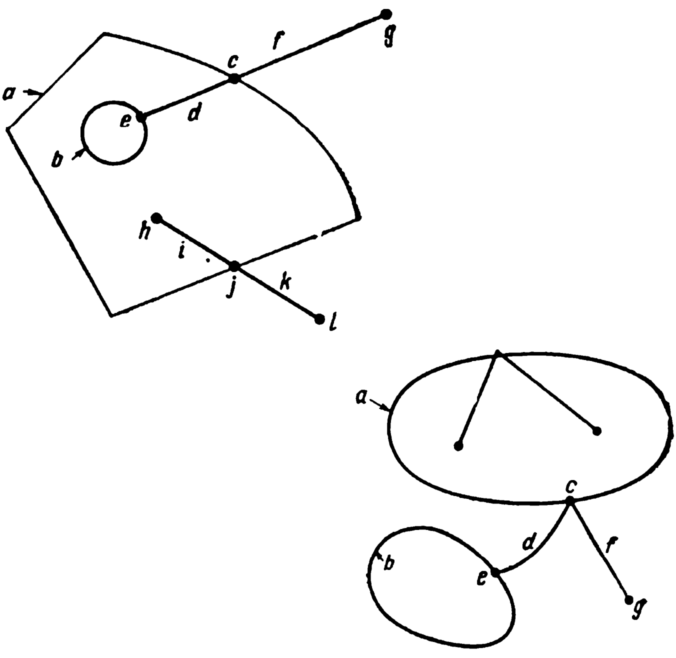
شکل ۱۸۷

وقتی کـه آقای جونز و دکتر سیتوس ، به یکدیگـر یادآوری می کردند که شکل‌های ۱۸۷، همانند هستند، همین تناظر کلی را درنظر می‌گرفتند. در این جا، بد نیست به‌یاد بیاوریم که، درابتدای این کتاب، ضمن تغییر شکل‌های مجاز، اجازهٔ برش را هم دادیم، به‌شرطی که، در

پایان‌کار، دوباره آن‌ها را ازبین ببریم.

مثلاً، می‌توانیم، دو تصویر شکل ۱۸۸ را، هم‌ارز تعریف کنیم. در واقع، هردوی آن‌ها، از دو منحنی بستهٔ a و b تشکیل‌شده‌اند، روی a رأس c قرار دارد، که a را به‌خط d وصل می‌کند، و روی d، رأس دیگر e قرار دارد که d را به b وصل می‌کند. از c ، خط دیگر f هم خارج شده است که به‌نقطهٔ آزاد g منتهی می‌شود. دراین‌جا، بازهم، به چه تناظرهایی می‌توان برخورد؟ (پاسخ را، درانتهای فصل ببینید.)

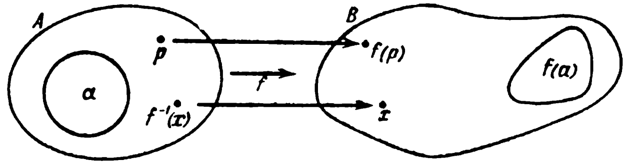
این‌تبدیل‌ها، که ازنظرنوع خود به‌کلی باهم متفاوتند، زمینه‌های مشابهی‌هم دارند، ولی‌بازهم می‌توانیم وجه‌اشتراك دیگری هم درآن‌ها



شکل ۱۸۸

پیدا کنیم. درهر حـالت، تناظر بین نقطه‌ها را، طبق یـك قاعده، یا یك تابـع f ، برقرار می کنیم. اگر تابـع، یا تبدیل مجموعهٔ A به‌مجموعهٔ B داده شده باشد (شکل ۱۸۹)، آن‌گاه می گوییم که، برای نقطهٔ p از A، تصویر f(p) متعلق به B وجـود دارد. برای زیر مجموعه‌ها هم، همین مطلب درست است: بـرای زیـرمجموعهٔ $a \subset A$ ، تصویـر $f(a) \subset B$ وجود دارد، عـلاوه براین، از نماد f^{-1} هم استفاده می‌شود: $f^{-1}(x)$ به‌نقطه‌ای از A گفته می‌شود کـه، تصویر آن، x باشد ؛ ایـن نقطه را ، تصویر معکوس x هم می‌نامند.

قبلاً گفتیم که واژه «پیوستگی» ، معمولاً در رابطه بایك جریان،



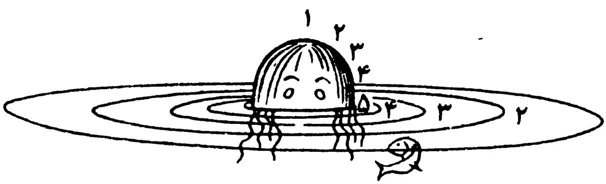
شکل ۱۸۹

یعنی در رابطه با یك تابـع، به‌کار می‌رود. تبدیلی را پیوسته‌گـوییم که، ضمن آن، نقطه‌های کاملاً نزدیك‌به‌هم از A، به‌نقطه‌های کاملاً نزدیك‌به‌هم ازB، منجرشوند (این مطلب رابايد درحال وهوایی درك کرد که،قبلاً، دربحث‌مربوط به همسایگی داشتیم). مثل‌قبل، دراین‌جا هم، می‌توانیم این تعریف را بهتر کنیم. ضمن‌تبدیل پیوستهٔ مجموعهٔ A به‌مجموعهٔ B، هرزیرمجموعهٔ باز $a \subset A$ ، به‌زیرمجموعهٔ باز $f(a) \subset B$ منجرمی‌شود. به‌یاد بیاوریم: مجموعه‌ای را بازمی گوییم که، برای هرنقطهٔ آن، یـك همسایگی وجود داشته باشد، به‌نحوی کـه همهٔ نقطه‌های آن، متعلق به مجموعهٔ مفروض باشد. بدون این‌کـه خود را در موضوع‌های جزئی

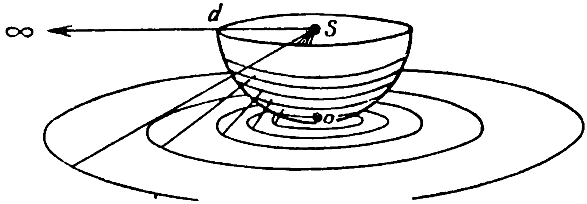
سردرگم کنیم، تنها یادآوری می کنیم که، ایـن تعریف، امکان انتخاب دو نقطهٔ به‌دلخواه نـزدیك به‌هم را در A (مثل حـالت نقطهٔ حدی)، و تصویرهای آن‌ها را در B ، به‌ما می‌دهد. مهم این است که، پیوستگی، به‌مفهوم نگاشت منتهی می‌شود.

نگاشت

نقشه، معمولاً جنبه‌های خیالی دارد و به‌چیزی که آن را تصویر کرده است، شباهت ندارد؛ حتی گر این چیز، «اقلیدسی» و به معنای عـادی آن ، «هندسی» باشد. اگـر دایره‌های هم مرکزی را روی یك نیم کره رسم و، آن‌ها را، برصفحه تصویر کنیم ، بسته به‌این کـه مرکز تصویر را در کجا انتخاب کنیم، به‌نتیجه‌های کاملاً مختلفی می‌رسیم.



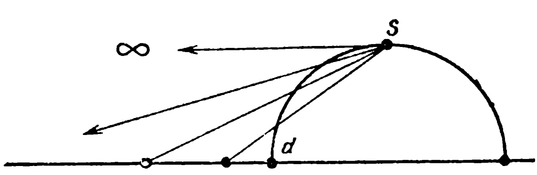
اگر نیم کره را به صورتی که در شکل ۱۹۰ دیده می‌شود، روی صفحه قراردهیم ونقطهٔ S را به‌عنوان مرکزتصویرانتخاب کنیم، تصویر دایره‌ها در روی صفحه، به‌صورت یك رشته دایره‌های هم مرکز رو به گسترش درمی‌آیند: هـرچه به دایرهٔ عظیمهٔ کـره نزدیك‌تـر می‌شویم، دایره‌های نظیرآن‌هـا برصفحه بزرگتر می‌شوند، به نحوی کـه تصویر دایرهٔ عظیمه به‌بی‌نهایت می‌رود. تصویر دایره‌هایی که به نقطهٔ پایینی O نزدیك‌اند، خیلی شبیه تصویرهای معکوس خود هستند، به‌نحوی که در



شکل ۱۹۰

نقطهٔ O ، تصویر و تصویر معکوس برهم منطبق می‌شوند.

از طرف دیگـر، شکل ۱۹۱ نشان می‌دهد که ، اگـر نیم کره را برگردانیم، چه‌وضعی پیش می آید: دایرهٔ عظیمه بر تصویر خود، منطبق می‌شود؛ ولی هرچه به‌طرف بالا برویم، دایره‌های روی کـره کوچکتر می‌شوند، درحالی که تصویرهای آن‌ها، دستگاهی از دایره‌ها را تشکیل می‌دهند کـه ، تا بی‌نهایت، گسترده‌اند. تصویـر رأس S ، به بی‌نهایت می‌رود. این، شبیه به‌حالت کسی است که در آب است؛ که فرق سر او دایره‌ای را تشکیل می‌دهد، درحالی کـه، دایره‌های بزرگتر، به تصویر معکوس خود، نزدیک‌ترند.



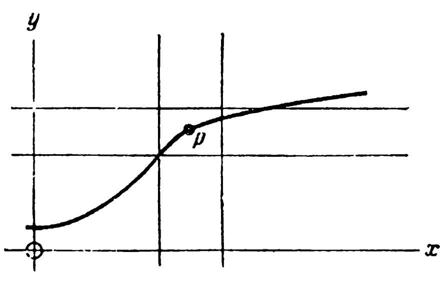
شکل ۱۹۱

همهٔ این‌ها، مثال‌هایی از نگاشت‌هستند: هرقاعده‌ای، که طبق آن، عضوهای یك‌مجموعه‌به‌عضوهای‌مجموعهٔ‌دیگری‌منجرشود، یك‌نگاشت است(حتی‌اگرهیچ گونه تصویرهندسی درکار نباشد) ، تنها به‌این شرط که‌جریان‌مفروض، درتناظریك‌به یك‌و، هم خودجریان‌وهم‌معکوس آن،

پیوسته باشد. تناظر یك به یك، به این معناست که، به‌هر نقطهٔ B ، یك و تنها یك نقطهٔ A ، برود. همین مطلب، برای تبدیل عکس هم درست است: ضمن f^{-1} ، هر نقطه از B ، به یك و تنها یك نقطه از A می‌رود چنین تابع متقارن و پیوسته‌ای، چیزی جز همسانی ـ که از قبل با آن آشنا هستیم ـ نیست، تنها، تعریف آن به‌صورت دیگری در آمده‌است.

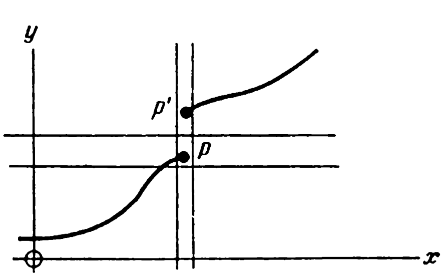
نمودار هم، نوع دیگری از تبدیل است. برای این که معنای نمودار را بفهمیم، ضرورتی ندارد که از هندسهٔ تحلیلی اطلاع داشته باشیم: مثلاً منحنی درجهٔ حرارت بیمار، یك نمودار است، که در آن، درجهٔ حرارت بالحظه‌های مختلف زمانی، تطبیق‌شده‌است. ضمن تشکیل نمودار، عضوهای مجموعهٔ T (زمان) را با عضوهای مجموعهٔ F (درجهٔ حرارت)، متناظر قرارمی‌دهیم. البته، درجهٔ حرارت بیماررا، به‌صورتی پیوسته، اندازه نمی گیرند، ولی با نشان دادن تغییر درجهٔ حرارت در روی صفحهٔ کاغذ، می‌توانیم نمودار پیوستهٔ آن را رسم کنیم. ازاین‌جا، برای «نمودار» می‌توان تعریف بهتری پیدا کرد.

دراین جا، مفهوم نزدیکی، یا همسایگی، کم و بیش با شکل دایره ـ که برای E^2 (فضای دوبعدی) مورد استفاده قرار می گرفت، فرق دارد (اگرچه، در این جا هم، با دوبعد سروکار داریم). مجموعهٔ



شکل ۱۹۲

یك بعدی T و مجموعهٔ یك بعدی F را انتخاب کـردهایم و، آنها، را باهم مقایسه می کنیم، بهنحوی کـه، نمودار، عبارت است از مقایسهٔ دو مجموعهٔ یك بعدی باهم. نموداری را پیوسته گوییم که درهر نقطهٔ خود پیوستهباشد. دوخطراست دلخواه رسممی کنیم: یکی دربالا و دیگری درپایین p ؛ اگر بتوانیم دو خط راست قائم، یکـی درسمت راست p و دیگـری درسمت چپ آن، طوری رسم کنیم که درفاصلهٔ بین آنها، نقطههای غیر واقـع در فاصلهٔ بین خطهـای راست افقی ، وجود نداشته باشد، آن وقت، این وضـع، بهمعنای پیوستگی در نقطهٔ p است (شکل ۱۹۲) همهٔ اینهـا وقتی روشنتر میشود کـه نمونهای از یـك نمودار ناپیوستهرا عرضهکنیم (شکل ۱۹۳). دراین نمودار، شکافی وجود دارد که، البته، مربوط به x نیست (درمجموعهٔ x ها، شکافی وجود ندارد). اگر دو خط راست افقی را ـ که از دو طرف p را دربر گـرفتهاند ـ به اندازهٔ کافی نزدیـكبه هم انتخاب کنیم، بهنحوی کـه نقطهٔ ′p درخارج آنها قـرار گیرد، آن وقت، هـرقدرهم خطهای راست قائم را نزدیك بههم بگیریـم، بازهم نقطهٔ ′p درفاصلهٔ بین آنها واقـع میشود، زیـرا درست دربالای p قـرار دارد. و این، تعریف پیوستگی را ـ که دربالا دادیم ـ نقض می کند. ممکن است گمان کنید که این مثال ، چندان هم



شکل۱۹۳

خوب نباشد، زیرا همین بحث را در مورد خط راست قائم هم ـ که در آن هیچ شکافی نباشد ـ می‌توان دنبال کرد. ولی چنین خطی، با تعریف نمودار تابع سازگار نیست. (البته، این روش بزدلانه است که آدم از دشواری فرار کند وخود را درپشت تعریف پنهان نماید، ولی به‌هر حال مفید است، چراکه وضع را روشن‌تر می‌کند.)

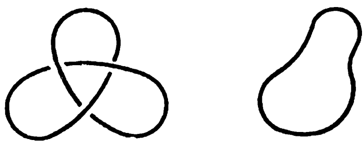
تعریفی که در این جا برای پیوستگی نمودار آوردیم، شبیه به تعریفی است که قبلاً دربارهٔ تبدیل پیوسته داده بودیم، تنها در این جا، همسایگی نقطهٔ p، اگر به‌عنوان عضوی از مجموعهٔ y درنظر گرفته شود، قطعهٔ Ny ازمحور y خواهدبود، درحالی که‌اگر نقطهٔ p را عضوی از مجموعهٔ x به‌حساب آوریم، آن وقت، همسایگی متناظر آن، قطعهٔ Nx از محور افقی خواهد بود.

اگر نمودار درتناظر یك به‌یك و، از هردو سمت، پیوسته باشد، بیش از آن‌که بشود آن را یك نقشه به‌حساب آورد، یك تصویر روی نقشه است؛ به زبان دیگر، روی آن، تنها مجموعهٔ x و «نقشه» آن (مجموعهٔy)، بلکه‌تناظربین x و y هم، به‌صورت به‌اصطلاح‌نموداری، داده شده است. چون هریك از مجموعه‌های مفروض، یك بعدی‌اند، نمودار دو بعدی می‌شود. اگر می‌خواستیم تغییر فتوگرام را در زمان، روی نمودار نشان دهیم، به سه بعد نیاز داشتیم. تبدیل‌های بغرنج‌تر، به‌نمودارهای n بعدی منجرمی‌شود. مثلاً اگربخواهیم‌نگاشت‌درون کره را به‌درون مکعب پیداکنیم، نمودارمتناظر آن، شش بعدی خواهد بود.

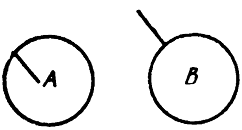
هم مکانی (homotopy)

«همسانی»، که توانستیم تعریف بهتری برای آن پیداکنیم، در

واژهٔ «هم‌مکانی» نقشی درجهٔ دوم دارد. «هم‌مکانی»، نه تنها امکان تبدیل همسان را، بلکه موقعیت‌هایی را هم، که ضمن آن‌ها، این تبدیل ممکن به‌نظر می‌رسد، دربرمی‌گیرد. می‌گوییم که، هرمنحنی بسته را می‌توان به هرمنحنی بستهٔ دیگری تبدیل کرد؛ ولی باید توجه داشت، حتی در موردهایی که از بعضی نکته‌ها چشم پوشی کنیم (مثلاً تصمیم بگیریم، بعد ازبرش، آن را ترمیم کنیم ـ شکل ۱۹۴)، ممکن‌است موقعیت‌هایی وجود داشته باشند، که نتوان به آن ها رسید. همین که فضایی را مشخص می‌کنیم که تغییر شکل مفروض در آن انجام می‌گیرد، خود به



شکل ۱۹۴

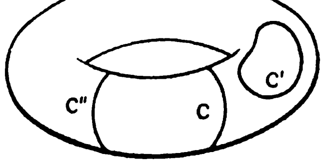


شکل ۱۹۵

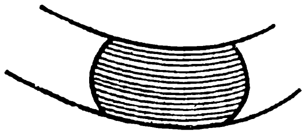
خود، محدودیت تازه‌ای برای آن قایل شده‌ایم. اگر منحنی بستهٔ ما، یك ریسمان باشد، آن وقت، عمل‌هایی می‌توانیم با آن، درفضا، انجام دهیم که، در حالتی که همیشه روی یك صفحه قرار داشته باشد، قابل انجام نیستند.

البته، این‌درست‌است که می‌توانیم، به‌کمك‌قاعده‌هایی، در روی صفحه، شکل A را به‌شکل B تبدیل کنیم (شکل ۱۹۵)، ولی، انجام چنین عملی، به‌این دلیل ممکن است که صفحه را همچون صحنهٔ تئاتر درنظر نمی‌گیریم که همهٔ عمل‌های لازم، روی‌آن به‌اجرا درآید: در این‌جا، نقشی به‌عهدهٔ صفحه گذاشته نشده است و شکل مفروض را، به غلط، مسطحه فرض می‌کنیم؛ همین و بس، درموقعیت دیگر (شکل ۱۹۶)، می‌توان به صورتی کاملاً اندیشیده گفت که، منحنی بستهٔ

C را در روی چنبره، نمی‌توان به وضع C' در آورد، ولی به وضع C''



شکل ۱۹۶



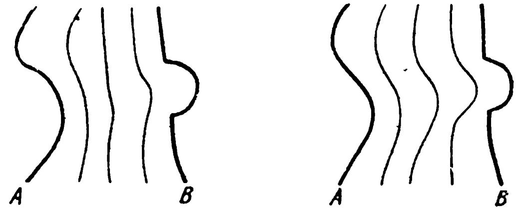
شکل ۱۹۷

قابل تبدیل است. ولی در خارج ازچنبره و در فضای E^3 ، هیچ‌گونه دشواری در این مورد پیش نمی‌آید و فرق نمی‌کند که با یك ریسمان سروکارداشته باشیم یا با یك منحنی تصوری.

قضیهٔ ژردان، کــه درابتدای کتاب از آن یاد کردیم، وقتی که در سطح چنبره مورد استفاده قرار گیرد ، برای حالت C' درست و، برای حالت‌های C و C'' نادرست است. دراین جا، براین مطلب تکیه داریم که، C و C'' را نمی‌توان، باتغییرشکل پیوسته درنقطه‌ای متمرکز کرد. درحالی که‌برای C' ، چنین عملی ممکن است. این ویژگی، بیشتر از خودشکل، به فضایی مربوط‌می‌شود که شکل‌مفروض در آن قرار گرفته است. می‌توانیم بگوییم که، روی چنبره، هردومنحنی ازنوع C و C'' هم‌مکان‌اند، درحالی که هیچ کدام‌از آن‌ها، با C' هم‌مکان نیستند.

خــود تبدیل C و C'' ، به‌خصوص وقتی کـه این تبدیل همسان بـاشد (بخش هاشورخـورده درشکل ۱۹۷)، به‌معنی هم‌مکانی C و C'' است. این‌مفهوم، ازاین‌هم گسترده‌تراست: همهٔ‌تصویرهای بینابینی C، نسبت بـه هم، هم‌مکان‌اند. در دو حـالت ساده‌تری کـه روی شکل ۱۹۸ نشان داده شده است، می‌توانیم متوجـه شویـم، کـه هم‌مکانـی مفروض منحصر به‌فرد نیست: در واقـع، بی‌نهایت هم‌مکانی وجود دارد که نتیجهٔ

آن‌ها یکی است: همهٔ آن‌ها، A را به B منجر می‌کنند.



شکل ۱۹۸

امکان یا عدم امکان یک تبدیل، بیشتر از انتخاب یک تبدیل مشخص، اهمیت دارد. حتی یکی از این تبدیل‌ها، برای C و C′ وجود ندارد، درحالی که، بی‌نهایت از آن‌ها، برای C و C″ وجود دارد. همهٔ این‌ها ، می‌توانند در جهت از میان برداشتن هرج و مرجی‌باشد که می توانست به وجود آید (اگرهیچ قیدی نمی کردیم که چه کاری در توپولوژی مجاز است و چه‌کاری غیرمجاز). ولی همان طور که قبلاً هم گفته‌ایم، مهم این است که تشخیص دهیم، در کجا باید دقیق بود و در کجا می‌توان بعضی‌چیزهارا تحمل کرد. با همهٔ محدودیتی که برای هم‌مکانی قایل‌شدیم، هنوز آزادی‌هایی دارد؛ هم‌مکانی به ما امکان می‌دهد تا فضاها را رده‌بندی کنیم (که منجر به نوع تازه‌ای از پایاها می‌شود).

مفهوم دیگری هم وجود دارد که، به صورتی کوتاه، از آن یاد می کنیم: مفهوم فشردگی. این مفهوم، با به اصطلاح «بی‌نهایت کامل» مشخص‌می‌شود: صفحهٔ اقلیدسی فشرده‌نیست، در حالی که فضا فشرده است،با وجودی که شامل «مقدار یکسانی» نقطه هستند. درحالتی که بخواهند مفهوم فشردگی را بااصطلاح‌های مجموعه‌ای بیان کنند ، از تعریف زیر استفاده می کنند: «مجموعه‌ای را فشرده گویند که، در هر

زیرمجموعهٔ نامتناهی آن، نقطه‌ای حدی متعلق به خود مجموعه وجود داشته باشد».

هیچ کدام از این‌ها، در نظر اول، مبهم نیستند، وخواننده می‌تواند، بااستفاده از دوفصل اخیر، خود به بررسی آن‌هابپردازد.

پاسخ به پرسش بخش «تبدیل». می‌توان نقطه‌ای را نشان داد که متناظربا نقطهٔ j باشد. این نقطه، ازاین بابت که درآن‌جا، خطهای i و k به a وصل‌شده‌اند، ابهامی‌ندارد. ولی نمی‌توانیم بادقت مشخص کنیم که i و k وهمچنین، راس‌های آن‌ها، h و l ، به‌کجا می‌روند (تنها می‌توانیم بگوییم، k و i ، جوانه‌های مختلفی را به‌وجودمی آورند، ولی نمی‌دانیم هرکدام ازآن‌ها، به‌کجا می‌روند).

نتیجه

اغلب پیش می‌آید که قهوه را درفنجان خود می‌ریزیم وتازه متوجه می‌شویم که شیررا فراموش کرده‌ایم. دراین مورد، راه کار این نیست که شیر را به طرف میزبیاوریم، بلکه بهتراست فنجان را برداریم وبه طرف یخچال، که بطری شیر درآن گذشته شده است، برویم. در روش اول، ناچاریم، فاصله بین یخچال ومیز را، چهاربار طی کنیم: به‌طرف یخچال برویم، شیر را به‌طرف میزبیاوریم و، بعد، درباره به‌طرف یخچال برویم تابطری شیر را درآن بگذاریم و، برای صرف قهوهٔ خود، به‌طرف میزبرگردیم. باروش دوم، همین‌مسیرراتنها دوبارطی می‌کنیم: فنجان را به‌طرف یخچال می‌بریم و، بعد، به‌طرف میزبرمی‌گریم. همهٔ این‌ها را، نمی‌توان به‌طورکامل، با زبان هندسی

توضیح داد، باوجود این، روشی که دراین‌جا، برای عمل خود طرح می‌ریزیم، باوجود این که، ازنظرطبیعت وماهیت خـود، «محاسبه‌ای» است، بیشتربه حوزهٔ توپولوژی تعلق دارد.

دراتباط بـا استفاده از کامپیوتر؛ ایـن روش را برنـامه ریـزی می گویند، که براساس توپولوژی نظری مجموعه‌ای، قراردارد. برای آماده کردن روش‌های کلی بغرنج ایـن‌گونـه کامپیوترها، ازتجزیه و تحلیل توپولوژیك نمودارها (که درفصل هشتم دربارهٔ آن ها صحبت کرده‌ایم) استفاده‌می کنند. توپولوژی؛ دراخترشناسی وسایررشته‌هایی که باریاضیات سروکار دارند، کاربرددارد.البته ، این زمینه‌ها، ربطی‌به زندگی روزانه ندارند، ولی در واقع، درپیش آمدهای روزمره هم، ازتوپولوژی استفاده می کنیم. وقتی که می گوییم، پالتودرکمد دیواری آویزان‌است، مدرسه درساختمان چهارم ازتقاطع‌خیابان باجادهٔ شمارهٔ ۳۲ قراردارد، «آیـدا» در اوپـرا کارمی کند،... بیشتر بـا توپولوژی سروکار داریم تاهندسه.

دریانوردان، مثل معماران، ازهندسه استفاده می کنند، ولـی در موقعیت‌های عادی، استفادهٔ آن‌ها، از محاسبهٔ فاصله‌ها ویـا چیزهـای ساده ازاین قبیل، تجاوزنمی کند.

در دوران رونسانس، درتفکر و روش علمی، تغییرهایی‌به‌وجود آمد؛ نمونهٔ خوبی ازاین تغییرها را می‌توان درشیمی دید. کیمیاگری سده‌های میانه، بیش‌ازهمه، به‌اختلاف‌های کیفی تـوجه داشت و، بـه ندرت، به‌اختلاف‌های کمیتی علاقه‌مند بود؛ بـه‌همین دلیل نتوانست «اززمین‌جداشود». درروش‌تفکرتازه، شیمی‌دان‌ها، به‌جای‌اختلاف‌های کیفی، به‌اختلاف‌های کمیتی توجه‌کردند و، درنتیجه؛ توانستند برای

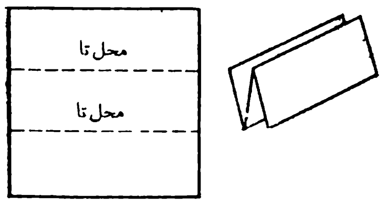
حقایق پراکنده، نظم و ترتیبی پیدا کنند. از طرف دیگر، قبل از پیدایش توپولوژی، تمامی تلاش ریاضیات در جهت روش‌های کمیتی بود و، بنابراین، باید قاعدتاً، تکامل آن، گرفتار دشواری نشده باشد.

ولی در واقع، چنین نیست: اگر یك بار دیگر صفحه‌های این کتاب را ورق بزنیم، می‌توانیم، متوجه شویم که، اگر به‌طور موقت، از شکل و اندازه دست برداریم، آن‌ها دوباره، به‌صورتی پنهانی ولی کامل‌تر، وارد در کار می‌شوند؛ در انواع مختلف هم، مرتبه‌هایی وجود دارد، و لو این که آن‌ها را با چوب‌خط اندازه گیری نکرده باشیم. همان طور که ستیفن وینسن پنه (وقتی که در بارهٔ لینکلن حرف می‌زند) می‌گوید: چوب خط برای اندازهٔ گیری خوب است، ولی به‌شرطی که شما دیواری برای اندازه گیری داشته باشید.

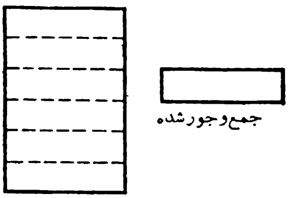
ضمیمه‌ها

ضمیمهٔ I

راه حل گاردنر، بر این مبناست که، در نوار، چند تـای طولی انجام دهیم، به‌نحوی که تعداد آن‌ها فرد باشد و با کناره‌ها، زاویه‌هـای قائمه‌ای تشکیل داده باشند (شکل ۱۹۹). اگر تعداد چین‌ها فرد باشد، می‌توانیم دوانتهای آن را، با یك نیم‌دورچرخش، بـه‌هـم تبدیل کنیم (بدون‌توجه به‌این که، این عدد فرد، چقدر بزرگ باشد. درواقع، اگر «پاهای» حرف N رابه‌طرف بالابچرخانید،دوباره به‌همان N می‌رسید،



شکل ۱۹۹



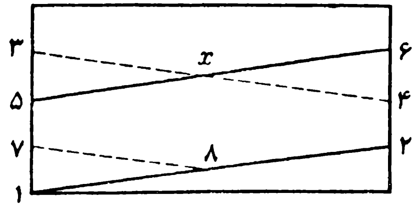
شکل ۲۰۰

درحالی که، اگرحرف M رابچرخانید، تغییرمی کند. بنابراین، ازنوار بی‌نهایت عریض کاغذ (بـه شرطی که بـه‌انـدازهٔ کافی نازك باشد)، می‌توان، نوارجمع وجـورشدهٔ باریکی به‌دست آورد و، سپس، طبق معمول، باآن عمل کرد (شکل ۲۰۰). بعدازآن هم تلاشی که درایـن مسیرداشتیم (فصل سوم را ببینید)، مسلماً این راه‌حل ساده، می‌تواند خشم شما را برانگیزد.

ضمیمهٔ II

قبل‌ازآن که نوار رابچسبانید، آن طور که درشکل ۲۰۱ نشان داده شده است، آن را علامت گذاری کنید. نقطه‌های شماره گذاری

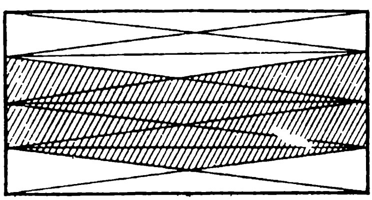
شده، ازضلع‌های کناری، به‌ترتیب، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ طول آن‌ها را جدا می‌کنند، خط‌چین‌ها ازطرف دیگررسم شده‌اند وقتی که نوار را بچسبانیم، خط‌ها، راست پیوسته درمی‌آیند. برش از نقطهٔ ۱ آغاز می‌شود و، سپس، طبق شماره‌ها پیش می‌رود. بعداز شمارهٔ ۵، وقتی که برش به



شکل ۲۰۱

نقطهٔ x رسید، نوار بازمی‌شود وبرش درامتداد خط راست مربوط ادامه پیدا می‌کند. از این دیدگاه، برش پیوسته نیست، ولی خود خط پیوسته است.

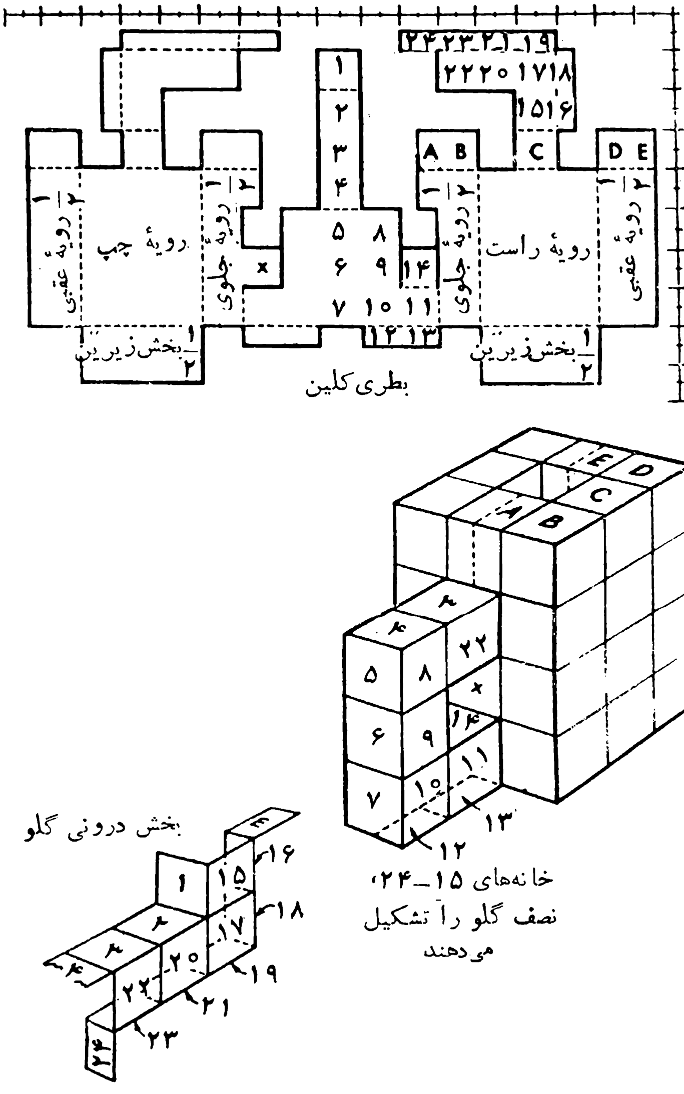
وقتی به‌نقطهٔ ۸ برسیم، نوار به دوبخش هم‌ارز تقسیم‌می‌شود، که می‌توان بامحاسبهٔ مثلث‌ها، آن رانشان داد (شکل ۲۰۲) بخش‌هاشور خورده، و یك قطعه وبخش هاشورنخورده، قطعه دیگر را تشکیل می‌دهد؛ هریك



شکل ۲۰۲

ازقطعه‌ها، شامل ۸ مثلث است. روی شکل ۶۲، روش دیگری نشان داده شده است که، به‌کمك آن می‌توان نوارموبیوس را به‌دوبخش‌هم

ارز تقسیم کرد. ولی در آن‌جا، برش، نه در کناره، بلکه در فاصله $\frac{۱}{۴}$ از کناره، آغاز می‌شود.



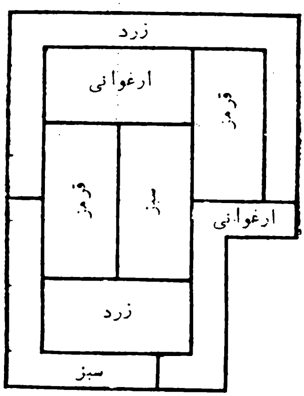
شکل ۲۰۳

ضمیمهٔ III

تصویر را درشکل ۲۰۳ نشان داده‌ایم؛ بهتراست ازکاغذ شطرنجی کلفتی استفاده کنیم که ضلع هرخانهٔ آن به‌تقریب ۴ سانتی‌متر باشد. برش درطول خطهای کلفت انجام می‌گیرد و تصویر، درطول خط‌چین‌ها، شکل می‌گیرد. شکل، تقریباً به‌طورکامل متقارن است، به استثنای بخش‌هایی که با x و۱۴ نشان داده شده‌است. روی دورنماهم، حرف‌ها وعددها را نگه داشته‌ایم تا ساختن مدل را ساده‌تر کند. اتصال‌ها، بدون این‌که یکدیگر را بپوشانند، انجام می‌گیرد، به‌نحوی که دراین‌جا باید ازنوارهای چسب‌دار استفاده کرد، نه‌چسب مایع.

ضمیمهٔ IV

$\frac{1}{3}$ رنگ قرمز را باهمهٔ رنگ آبی مخلوط می‌کنیم، رنگی ارغوانی به‌دست می‌آید که برای رنگ‌کردن ۱۶ مترمربع کافی است. طرح رنگ‌آمیزی درشکل ۲۰۴ داده شده است.



شکل ۲۰۴

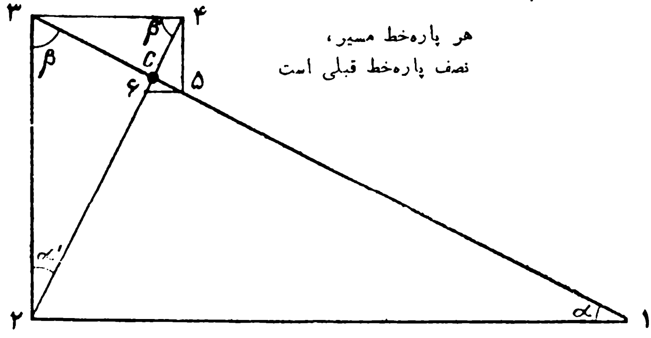
ضمیمهٔ V

این دنباله، از ترکیب دودنباله به‌دست می‌آید، ولی می‌توان آن را با یك فرمول بیان کرد: تعداد بخش‌ها، برابراست با $2^n + 1$ (۳، ۵، ۹، ۱۷،...)، که در آن، n عبارت است ازتعداد برش‌های ناقص.

ضمیمهٔ VI

ساختمان (شکل ۲۰۵). خطهای راست ۲ـ۱، ۳ـ۲ و ۴ـ۳ را رسم وزاویه‌های ۲ و ۳ را قائمهٔ می‌گیریم. ۱ رابه ۳ و ۲ را به ۴ وصل می‌کنیم؛ نقطهٔ C، محل برخورد آن، نقطهٔ مورد نظراست.

اثبات. خطهای راست ۵ـ۴ و ۶ـ۵ را رسم‌می‌کنیم، درنتیجه، مثلث‌های قائم الزاویه‌ای به‌دست می‌آید.



شکل ۲۰۵

پاره خط ۲ـ۱ دوبرابرپاره خط ۳ـ۲ و پاره خط۳ـ۲ دوبرابر پاره خط ۴ـ۳ است؛ درنتیجه، مثلث‌های ۳ـ۲ـ۱ و ۴ـ۳ـ۲ متشابه می‌شوند وداریم:

$$\alpha = \alpha' \text{ و } \beta = \beta'$$

ازاین‌جا روشن می‌شود که‌مثلث C‌ـ۳ـ۲ بامثلث ۳ـ۲ـ۱ متشابه است و، بنابراین، زاویهٔ به‌راس C قائمه است.

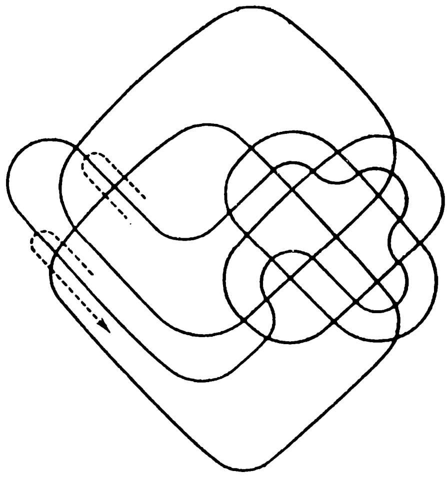
همهٔ مثلث‌های قائمه‌ای که درزیرنام می‌بریم، متشابه می‌شوند:

۱—۲—C، ۲—۳—C، ۳—۴—C، ۴—۵—C، ...

و وترهای آن‌ها (به‌دلیل این که طول آن‌ها، هربار نصف می‌شود) مسیرمورد نظرشخص راتشکیل می‌دهند.

ضمیمهٔ VII

روی شکل ۲۰۶، نمودار مربوط به حالت پنج مجموعه، داده شده است: خط چین‌ها، معرف آغازمجموعهٔ ششم هستند، که درطول مرزهای مجموعهٔ پنجم حرکت می‌کنند. ازاین راه می‌توان نمودار



شکل ۲۰۶

را، برای هرتعداد مجموعه، رسم کرد، تنها باید هرمجموعهٔ تازه را، درطول مرزهای مجموعهٔ قبلی، رسم کرد.

نشر نی